中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

博士学位论文



论文题目 Grassmann 流形的子流形几何

作者姓名 李 康

学科专业 基 础 数 学

导师姓名 胡 森 教授 许小卫 副教授

完成时间 二 〇 一 五 年 四 月

中国科学技术大学

博士学位论文



Grassmann 流形的子流形几何

作者姓名：李 康
学科专业：基础数学
导师姓名：胡森 教授
许小卫 副教授
完成时间：二〇一五年四月

University of Science and Technology of China

A dissertation for doctor's degree



The geometry of submanifolds in Grassmannian manifold

Author : Kang Li

Speciality : Pure Mathematics

Supervisor : Prof. Sen Hu

Assoc. Prof. Xiaowei Xu

Finished Time : April, 2015

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：李康　　　　签字日期：2015.5.18

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☑公开　□保密 ______ 年

作者签名：李康　　　　导师签名：胡森

签字日期：2015.5.18　　　　签字日期：2015.5.18.

摘 要

本文主要采用活动标架法研究了复 Grassmann 流形 $G(k,n)$ 中的调和二维球面，复射影空间 CP^n 中的齐性三维球面和二次超曲面 Q_2 中的具有平行平均曲率向量的曲面及 Lagrangian 曲面。我们在 S^2 上构造了一系列全纯微分形式，并且由此得到了 $G(2,4)$ 和 $G(2,5)$ 中调和二维球面相配的标架和其准线；利用 $SU(2)$ 的复不可约表示构造了 CP^n 中的一列齐性三维球面，它们既非弱 Lagrangian 型也非 CR 型；引入 Q_2 中具有平行平均曲率向量曲面的偏差角 θ，证明存在一簇从单连通曲面到 Q_2 的具有平行平均曲率向量的等距浸入；最后描述了 Q_2 中一类具有常曲率的 H 极小 Lagrangian 曲面，并且给出了一个 Gaussian 曲率 $K = 2$ 的极小 Lagrangian 球面。

关键词： 全纯微分形式，调和序列，偏差角，Gaussian 曲率，平行平均曲率向量，Lagrangian 型

ABSTRACT

In this thesis, we investigate the harmonic two sphere in the Grassmann manifolds $G(k, n)$, homogeneous three dimensional sphere in the complex projective space and surface with parallel mean curvature vector and Lagrangian surface in the hyperquadric Q_2, by the method of moving frames. We construct a series of holomorphic differential forms on S^2, through which, we can simplify the moving frames along a harmonic two-sphere in $G(2,4)$ and $G(2,5)$. We construct many homogeneous three dimensional spheres in CP^n by the irreducible unitary representations of $SU(2)$, which are neither of CR-type nor weakly Lagrangian. We introduce the deviation angle θ of surfaces with parallel mean curvature vector in Q_2, and prove that there exists a series of isometric immersions with parallel mean curvature vector from a simply connected surface into Q_2. Finally we describe a class of H-minimal Lagrangian surfaces with constant curvature in Q_2, and give a example of minimal Lagrangian S^2 with Gaussian curvature $K = 2$.

Keywords: Holomorphic differential forms, Harmonic sequence, Deviation angle, Gaussian curvature, Parallel mean curvature vector, Lagrangian type

目 录

第一章 绪论

复 Grassmann 流形 $G(k,n)$ 是 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中所有 k 维复子空间构成的集合，它是一个 Kähler 流形。当 $k=1$ 时，$G(1,n)$ 就是复射影空间 CP^{n-1}。S. S. Chern 和 J. G. Wolfson 利用活动标架法证明了 $G(k,n)$ 中的调和二维球面都可以用 $G(k,n)$ 中的全纯二维球面通过 ∂，$\bar{\partial}$-变换以及 recrossing，returning 过程得到，详见 [11]，[36]。F. Burstall 和 J. Wood 在 [4] 中利用 twistor 方法研究了同样的问题。K. Uhlenbeck 在 [34] 中利用调和映射的扩张解构造曲面 M 到 $U(n)$ 中的调和映射。对于具有常全纯截面曲率的 Kähler 流形中的极小曲面，可以在其上定义一个全纯的 3 次微分形式。如果这个极小曲面是球面，则此 3 次微分形式恒为 0，而且可以定义一个或二个 4 次全纯微分形式。这样下去，如果所有这些全纯微分形式恒为 0，则就可以构造一个沿曲面的特殊的活动标架，见 [35]。本文第二章利用这些全纯微分形式研究了复 Grassmann 流形 $G(2,4)$，$G(2,5)$ 中的调和二维球面，扩展了 S. S. Chern 和 J. G. Wolfson[11] 的工作，并且在等距的条件下可以得到 S^2 的 Gauss 曲率的上界估计。

复射影空间 CP^n 中极小二维球面具有很好的性质，已经得到了充分的研究，本文第三章研究了 CP^n 中的三维球面。设 $f: M \to CP^n$ 为流形 M 到 CP^n 的浸入映射，$F: TM \to TM$ 由 $\langle F(X), Y\rangle = f^*\Omega(X,Y)$ 定义，其中 $f^*\Omega$ 为 CP^n 的 Kähler 形式的拉回。如果 $F \equiv 0$，则称子流形 M 为弱 Lagrangian 或全实的；如果存在 F 不变从的分解 $TM = V_1 \oplus V_2$ 使得 $F|_{V_1} = 0$，$(F|_{V_2})^2 = -id$，则称子流形 M 为 CR 型子流形。Zh. Q. Li[24] 研究了 CP^n 中弱 Lagrangian 和 CR 型极小常截面曲率的三维球面 S^3，得到了 CR 型情形下的刚性结果。J. Fei, C. Peng, X. Xu[17] 通过一些标准例子刻画了 CP^n 中弱 Lagrangian 极小常截面曲率的三维球面 S^3。本文第三章中我们通过 $SU(2)$ 的酉表示给出了 CP^n 中的三维球面 S^3 的一些新例子，既不是 Lagrangian，也不是 CR 型的，并且得到了 CR 型极小常截面曲率的三维球面 S^3 的相配标架，从而给出了它的刚性结果的一个新证明。

近些年来黎曼流形中的极小曲面已经得到了很多的研究，比极小曲面更广的是具有平行平均曲率向量的曲面。B. Y. Chen[6] 和 S. T. Yau[39] 研究了 n 维实空间形式 $M^n(c)$ 中的具有平行平均曲率向量的曲面，它们或者是极小的或者在 $M^n(c)$ 中的三维球面里。U. Abresch, H. Rosenberg [1] 和 F. Torralbo, F. Urbano[33] 分别研究了 $S^2\times R, H^2\times R$ 和 $S^2\times S^2, H^2\times H^2$ 中的具有平行平均曲率向量的曲面，通过构造相应的 Hopf 形式，他们一些分类和刚性结果。然而复空间形式中也有相应的 Hopf 形式，T. Ogata [31]，K. Kenmotsu, D. Zhou[23] 和 S. Hirakawa [20] 对二维复空间形式中具有平行平均曲率向量的曲面进行了分类。本文第四章我们研究了复射影空间 CP^3 中超二次曲面 Q_2 中的平行平均曲率的曲面，得到了一组微分方程，并且引入一个角度 θ 来刻画二维复空间形式和超

二次曲面 Q_2 的不同。如果 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$，则存在一簇从单连通曲面到 Q_2 的具有平行平均曲率向量场的等距浸入。

设 (N, J, ω) 为 Kähler 流形，且 $\dim_C N = n$，其中 J 为复结构 ω 为 Kähler 形式。从 q 维流形 M 到 N 的浸入 $f : M \to N$ 称为全实的，如果 $f^*\omega = 0$。特别地全实浸入 f 称为 Lagrangian，如果 $q = n$。沿 Lagrangian 浸入 $f : M \to N$ 的向量场 V 称为 Hamiltonian 变分，如果 1 形式 $\alpha_V := \omega(V, \cdot)\ |_M$ 在 M 上是正合的。一簇从 M 到 N 的光滑映射 $\{f_t\}$ 称为 Hamiltonian 形变，如果它的导数是 Hamiltonian，且 Lagrangian 浸入 $f : M \to N$ 称为 Hamiltonian 极小的或 H 极小的，如果对任意 Hamiltonian 形变它满足 $\frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ \mathrm{vol} f_t(M) = 0$。H 极小 Lagrangian 子流形的 Euler-Lagrange 方程为 $\delta\alpha_H = 0$，其中 H 是 f 的平均曲率向量场，δ 是 M 上诱导度量的余微分算子。本文第五章中我们描述了 Q_2 中一类具有常曲率的 H 极小 Lagrangian 曲面，并且给出了一个 Gauss 曲率 $K = 2$ 的极小 Lagrangian 球面。

本文中采用重复指标求和的习惯。

第二章　Grassmann 流形中的二维球面

给定从 Riemann 曲面 M 到复 Grassmann 流形 $G(k,n)$ 的调和映射 F，Chern 和 Wolfson 在 [11] 中定义基本折射 (fundamental collineations)∂ 和 $\bar{\partial}$，并由这两个基本折射构造了新的调和映射 ∂F 和 $\bar{\partial}F$。许小卫根据基本折射 $\partial, \bar{\partial}$ 的秩以及 ∂F 和 $\bar{\partial}F$ 像之间的关系研究 Grassmann 流形 $G(2,n)$ 中线性满的极小二维球面，得到了 Gauss 曲率和 Kähler 角的一系列 pingching 结果。本章中我们运用活动标架法研究了复 Grassmann 流形 $G(2,4)$，$G(2,5)$ 中的调和二维球面，通过构造一系列全纯微分形式，在一定条件下我们得到了 $G(2,4)$ 和 $G(2,5)$ 中调和二维球面的准线，并且在等距的条件下可以得到 S^2 的 Gauss 曲率的上界估计。

2.1　基本公式

复 Grassmann 流形 $G(k,n)$ 是复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中所有 k 维复子空间构成的集合，同构于齐性空间 $U(n)/U(k)\times U(n-k)$。特别地，$G(1,n+1)$ 就是复射影空间 CP^n。约定指标范围和记号如下：

$$1\leqslant A,B,\cdots\leqslant n;\ \ 1\leqslant i,j,\ \ \cdots\ \ \leqslant k;\ \ k+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n.$$

设选取 $\mathbb{C}^n$ 的酉标架场 $Z=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$，由 $dZ_A=\omega_{AB}Z_B$ 定义 $U(n)$ 的 Maurer-Cartan 形式 ω_{AB}。它们满足反 Hermitian 关系：$\omega_{AB}+\bar{\omega}_{BA}=0$。

外微分 $dZ_A=\omega_{AB}Z_B$，我们得到酉群 $U(n)$ 的 Maurer-Cartan 结构方程

$$d\omega_{AB}=\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}. \tag{2.1}$$

$ds_G^2=\omega_{i\alpha}\bar{\omega}_{i\alpha}$ 确定了 $G(k,n)$ 上一个 Hermitian 度量，并且是 Kähler 的，其 Kähler 形式为：$\Omega=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\omega_{i\alpha}\wedge\bar{\omega}_{i\alpha}$。

局部地，设给定 Riemann 曲面 M 上的度量 $ds^2=\varphi\bar{\varphi}$，其中 φ 是 M 上局部的复值 (1,0)-形式，在相差 $e^{\sqrt{-1}t}$ 意义下是唯一确定的。曲面 M 的基本方程为

$$d\varphi=-\sqrt{-1}\rho\wedge\varphi, \tag{2.2}$$

$$d\rho=-\frac{\sqrt{-1}}{2}K\varphi\wedge\bar{\varphi}, \tag{2.3}$$

其中实值 1-形式 ρ 是余标架场 φ 所对应的联络形式，K 是 Gauss 曲率。

设 $F:M\longrightarrow G(k,n)$ 是 Riemann 曲面 M 到 $G(k,n)$ 的调和映射。选取酉标架场 Z_A 使得 Z_i 和 Z_α 分别张成 $F(x)$ 和 $F^\perp(x)$。令

$$F^*\omega_{AB}=a_{AB}\varphi+b_{AB}\bar{\varphi}. \tag{2.4}$$

可以验证，F 是全纯映射当且仅当 $b_{i\bar{\alpha}}=0$，对任意的 i 和 α。外微分 (2.4) 式，并利用 (2.1) 和 (2.2)，可得

$$Da_{i\alpha}\wedge\varphi+Db_{i\alpha}\wedge\bar{\varphi}=0, \tag{2.5}$$

这里

$$\begin{aligned} Da_{i\alpha} &= da_{i\alpha}-\omega_{ij}a_{j\alpha}+a_{i\beta}\omega_{\beta\alpha}-\sqrt{-1}a_{i\alpha}\rho, &(2.6)\\ Db_{i\alpha} &= db_{i\alpha}-\omega_{ij}b_{j\alpha}+b_{i\beta}\omega_{\beta\alpha}+\sqrt{-1}b_{i\alpha}\rho, &(2.7)\end{aligned}$$

由 Cartan 引理可得

$$Da_{i\alpha}=p_{i\alpha}\varphi+q_{i\alpha}\bar{\varphi},\ Db_{i\alpha}=q_{i\alpha}\varphi+r_{i\alpha}\bar{\varphi}. \tag{2.8}$$

映射 $F:M\longrightarrow G(k,n)$ 是调和的充要条件是 $q_{i\bar{\alpha}}=0$，见 [11]，或等价地

$$Da_{i\alpha}\equiv 0 \mod \varphi,\ \ Db_{i\alpha}\equiv 0 \mod \bar{\varphi}. \tag{2.9}$$

二次形式

$$\Pi^{C}_{i\alpha}=Da_{i\alpha}\varphi+Db_{i\alpha}\bar{\varphi}=p_{i\alpha}\varphi\varphi+2q_{i\alpha}\varphi\bar{\varphi}+r_{i\alpha}\bar{\varphi}\bar{\varphi}, \tag{2.10}$$

称为映射 F 的复第二基本形式。F 是全测地的当且仅当 $Da_{i\alpha}=Db_{i\alpha}=0$。

当 M 是二维球面时，我们可以假定映射 F 在分支点外是等距的，见 [11]，

$$ds^2=F^*ds^2_G=\varphi\bar{\varphi}, \tag{2.11}$$

因此可以得到

$$a_{i\alpha}\bar{b}_{i\alpha}=0, \tag{2.12}$$

$$a_{i\alpha}\bar{a}_{i\alpha}+b_{i\alpha}\bar{b}_{i\alpha}=1. \tag{2.13}$$

设 $(M,ds^2=\varphi\bar{\varphi})$ 为一个黎曼曲面，$F:M\longrightarrow G(k,n)$ 为一个非常值的调和映射。对于 $Z\in F(x)$，记

$$dZ\equiv\varphi X+\bar{\varphi}Y, \qquad \mod F(x), \tag{2.14}$$

其中 $X,Y\in F(x)^{\perp}$。如果 Z 不为零向量，令 $[Z]$ 为其射影化，则

$$\partial:[Z]\mapsto[X],\quad \bar{\partial}:[Z]\mapsto[Y] \tag{2.15}$$

定义了从 $[F(x)]$ 到 $[F(x)^{\perp}]$ 的映射，称为基本折射。

如果 F 非反全纯，则定义

$$\begin{aligned}&\partial F:M\longrightarrow G(k_1,n)\\ &\partial F(x)=\mathrm{span}\{a_{i\alpha}(x)Z_\alpha:1\leqslant i\leqslant k\}, &(2.16)\end{aligned}$$

如果 F 非全纯，则定义

$$\begin{aligned}&\bar{\partial}F:M\longrightarrow G(k_{-1},n)\\ &\bar{\partial}F(x)=\mathrm{span}\{b_{i\alpha}(x)Z_\alpha:1\leqslant i\leqslant k\}, &(2.17)\end{aligned}$$

其中 k_1 和 k_{-1} 是正整数，分别称为 ∂F 和 $\bar{\partial}F$ 的秩。

2.2　S^2 上全纯微分形式的构造

约定指标范围和记号如下：

$$0 \leqslant A, B, \cdots \leqslant n;\quad 1 \leqslant i, j, \quad \cdots \quad \leqslant n.$$

CP^n 上的 Fubini-Study 度量为 $ds^2_{FS} = \omega_{0i}\bar{\omega}_{0i}$，其中 ω_{AB} 是酉群 $U(n+1)$ 的 Maurer-Cartan 形式。

设 $F: S^2 \longrightarrow CP^n$ 是既非全纯也非反全纯的极小浸入，S^2 上的诱导度量为

$$ds^2 = F^* ds^2_{FS} = \varphi\bar{\varphi} \tag{2.18}$$

其中 φ 是 S^2 上局部的复值 $(1,0)$-形式，在相差 $e^{\sqrt{-1}t}$ 意义下是唯一确定的。我们知道 (见 [10]) 存在沿 F 的酉标架使得下式成立

$$\omega_{01} = X\varphi \quad \omega_{02} = Y\bar{\varphi}, \tag{2.19}$$

$$\omega_{0\alpha} = 0, \quad 3 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{2.20}$$

其中 X, Y 是 S^2 上的局部复值光滑函数且满足 $|X|^2 + |Y|^2 = 1$。

外微分等式

$$\bar{Y}\omega_{01} - X\bar{\omega}_{02} = 0 \tag{2.21}$$

由 $U(n+1)$ 的 Maurer-Cartan 结构方程可得

$$Xd\bar{Y} - \bar{Y}dX + X\bar{Y}(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) = a\varphi + b\bar{\varphi}, \tag{2.22}$$

$$-\omega_{21} = b\varphi + c\bar{\varphi}, \tag{2.23}$$

其中 a, b, c 是 S^2 上的局部复值光滑函数。

外微分等式

$$\omega_{0\alpha} = 0, \quad 3 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{2.24}$$

由 $U(n+1)$ 的 Maurer-Cartan 结构方程可得

$$\omega_{1\alpha} = a^1_\alpha\varphi + b^1_\alpha\bar{\varphi}, \tag{2.25}$$

$$\omega_{2\alpha} = b^1_\alpha\varphi + c^1_\alpha\bar{\varphi}, \tag{2.26}$$

其中 $a^1_\alpha, b^1_\alpha, c^1_\alpha$ 是 S^2 上的局部复值函数。

我们知道 (见 [10])F 极小 (调和) 当且仅当

$$b = b^1_\alpha = 0, \quad 3 \leqslant \alpha \leqslant n. \tag{2.27}$$

选取 Z_3 使得 $a^1_\alpha = 0, 4 \leqslant \alpha \leqslant n$, 假定 $a^1_3 \neq 0$。选取 Z_4 使得 $c^1_\alpha = 0, 5 \leqslant \alpha \leqslant n$, 假定 $c^1_4 \neq 0$。

引理 2.2.1. $\omega_{01}\omega_{12}\omega_{20}$ 是 S^2 上整体定义的全纯微分形式，因而消失。

证明: 由于此时定义的标架只相差 $U(1)\times\ldots\times U(n-4)$ 的变换，所以容易看出此 3 次微分形式独立于标架的选取，因而在 S^2 上整体定义。选取 S^2 上的复坐标，局部有 $\varphi=\lambda d\zeta$，因此

$$\omega_{01}\omega_{12}\omega_{20}=-X\bar{Y}\bar{c}\lambda^3 d\zeta^3,$$

只需证明 $d\zeta^3$ 的系数是 ζ 的全纯函数，因为 S^2 不存在全纯微分形式，所以此系数为 0。记

$$\omega_{01}=u d\zeta,\quad \omega_{12}=v d\zeta,\quad \omega_{20}=x d\zeta,$$

因此

$$\omega_{01}\omega_{12}\omega_{20}=uvx d\zeta^3,$$

外微分前一式，应用结构方程可得

$$\begin{aligned}
du &\equiv u(\omega_{00}-\omega_{11}),\\
dv &\equiv v(\omega_{11}-\omega_{22}),\\
dx &\equiv x(\omega_{22}-\omega_{00}), \qquad \mathrm{mod}\ d\zeta,
\end{aligned}$$

所以 $d(uvx)\equiv 0,\ \mathrm{mod}\ d\zeta$。证完。

由此引理可得 $\omega_{12}=0$，外微分 $\omega_{1\alpha}=0, 4\leqslant\alpha\leqslant n$, 由结构方程可得 $\omega_{3\alpha}=a_\alpha^2\varphi, 4\leqslant\alpha\leqslant n$, 选择标架 Z_5 使得 $a_\alpha^2=0, 6\leqslant\alpha\leqslant n$, 假定 $a_5^2\neq 0$。类似地有 $\omega_{01}\omega_{13}\omega_{32}\omega_{20}=Xa_3^1\bar{c}_3^1\bar{Y}\varphi^4$ 为 0，因此得到 $c_3^1=0$。外微分 $\omega_{2\alpha}=0, 5\leqslant\alpha\leqslant n$, 再由结构方程可得 $\omega_{4\alpha}=c_\alpha^2\bar{\varphi}, 5\leqslant\alpha\leqslant n$, 选择标架 Z_6 使得 $c_\alpha^2=0, 7\leqslant\alpha\leqslant n$, 并且假定 $c_6^2\neq 0$。类似可证 $\omega_{01}\omega_{13}\omega_{34}\omega_{42}\omega_{20}=Xa_3^1a_4^2\bar{c}_4^1\bar{Y}\varphi^5$ 为 0，因此可得 $a_4^2=0$。如此下去便得到

定理 2.2.1. 设 $F:S^2\longrightarrow CP^n$ 是一般情形下的等距调和映射，则存在沿 F 的标架使得 *Maurer-Cartan* 形式满足

$$\begin{gathered}
\omega_{01}=X\varphi, \omega_{02}=Y\bar{\varphi}, \omega_{0\alpha_0}=0, 3\leqslant\alpha_0\leqslant n,\\
\omega_{13}=a_3^1\varphi, \omega_{1\alpha_1}=0, \alpha_1=2, 4\leqslant\alpha_1\leqslant n,\\
\omega_{24}=c_4^1\bar{\varphi}, \omega_{2\alpha_2}=0, \alpha_2=3, 5\leqslant\alpha_2\leqslant n,\\
\omega_{2k+1,2k+3}=a_{2k+3}^{k+1}\varphi, \omega_{2k+1,\alpha_{2k+1}}=0, \alpha_{2k+1}=2k+2, 2k+4\leqslant\alpha_{2k+1}\leqslant n,\\
\omega_{2k+2,2k+4}=c_{2k+4}^{k+1}\bar{\varphi}, \omega_{2k+2,\alpha_{2k+2}}=0, \alpha_{2k+2}=2k+3, 2k+5\leqslant\alpha_{2k+2}\leqslant n,
\end{gathered}$$

其中 $k\geqslant 0$，$a_{2k+3}^{k+1}, c_{2k+4}^{k+1}$ 是复值解析型函数，并且 $|a_{2k+3}^{k+1}|, |c_{2k+4}^{k+1}|$ 是在 S^2 上整体定义的非零解析型函数。

为了得到 F 的度量结构方程，我们先看一个引理，见 [13]。

引理 2.2.2. 设 $(M, ds^2 = \varphi\bar{\varphi})$ 为一个曲面，ζ 是 M 的开子集 U 上的共形坐标。令 f 是 U 上的光滑复值函数，ω 是 U 上的纯虚 *1*-形式。假定

$$(df + f\omega) \wedge d\zeta = 0, \tag{2.28}$$

则 f 是解析型函数，且

$$d\omega = \frac{1}{2}\Delta \log |f| \bar{\varphi} \wedge \varphi. \tag{2.29}$$

定理 2.2.2. 设 $F: S^2 \longrightarrow CP^n$ 是一般情形下的等距调和映射，K 是 S^2 的 *Gauss* 曲率，则在相应的零点之外有

$$\begin{aligned}
\Delta \log |X| &= K - 4|X|^2 + 2|Y|^2 + 2|a_3^1|^2, \\
\Delta \log |Y| &= K - 4|Y|^2 + 2|X|^2 + 2|c_4^1|^2, \\
\Delta \log |a_3^1| &= K + 2|X|^2 - 4|a_3^1|^2 + 2|a_5^2|^2, \\
\Delta \log |c_4^1| &= K + 2|Y|^2 - 4|c_4^1|^2 + 2|c_6^2|^2, \\
\Delta \log |a_{2k+3}^{k+1}| &= K + 2|a_{2k+1}^{k}|^2 - 4|a_{2k+3}^{k+1}|^2 + 2|a_{2k+5}^{k+2}|^2, \\
\Delta \log |c_{2k+4}^{k+1}| &= K + 2|c_{2k+2}^{k}|^2 - 4|c_{2k+4}^{k+1}|^2 + 2|c_{2k+6}^{k+2}|^2,
\end{aligned}$$

其中 $k \geqslant 1$。

证明：外微分 $\omega_{01} = X\varphi$，应用结构方程可得

$$[dX + X(\omega_{11} - \omega_{00} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = 0,$$

因此由上面的引理得到第一个方程，其它方程的证明类似。

2.3 G(2,4) 中的调和二维球面

本节中我们通过活动标架法，利用 S^2 上全纯微分形式的消失化简 $G(2,4)$ 中的调和二维球面的活动标架，并且求得其准线。

设 $F: S^2 \longrightarrow G(2,4)$ 是既非全纯也非反全纯的调和映射，选择标架 $Z_1, ..., Z_4$ 使得 Z_1, Z_2 张成 $F(x)$，Z_3, Z_4 张成 $F^{\perp}(x)$。基本变换 $\partial, \bar{\partial}$ 分别把 Z_i 映到 $a_{i\alpha}Z_\alpha$ 和 $b_{i\alpha}Z_\alpha$。

记

$$A = (a_{i\alpha}), \quad B = (b_{i\alpha}), \quad C = (c_{ij}) = (a_{i\alpha}\bar{b}_{j\alpha}), \tag{2.30}$$

我们知道下面事实 [11]

$$\det C = \det A \det \bar{B} = 0. \tag{2.31}$$

下面我们只讨论 $\mathrm{rank}A = 1, \mathrm{rank}B = 2$ 的情形。选择标架使得 Z_1, Z_3 分别是 ∂ 的核和像由于关系 (2.12)(2.13) 可得

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ 0 & \bar{b}_3 \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

其中 $ab_1b_3 \neq 0$。标架 Z_A 的定义相差一个 $U(1) \times \ldots \times U(1)$ 变换，因此 $[Z_A]$ 在 CP^3 中定义良好。由调和条件可得

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & p\varphi & \bar{b}_1\bar{\varphi} & \bar{b}_2\bar{\varphi} \\ -\bar{p}\bar{\varphi} & \omega_{22} & a\varphi & \bar{b}_3\bar{\varphi} \\ -b_1\varphi & -\bar{a}\bar{\varphi} & \omega_{33} & q\varphi \\ -b_2\varphi & -b_3\varphi & -\bar{q}\bar{\varphi} & \omega_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

不难验证映射 $F: S^2 \longrightarrow CP^3$，

$$x \mapsto [Z_\lambda(x)], \quad \lambda = 2, 3, \quad x \in S^2 \tag{2.34}$$

是调和的。

下面我们构造关于 $[Z_2]: S^2 \longrightarrow CP^3$ 的全纯微分形式。关于 $[Z_2]$ 的全纯 3-形式为

$$\omega_{12}\omega_{23}\omega_{31} + \omega_{42}\omega_{23}\omega_{34} = -a(pb_1 + qb_3)\varphi^3, \tag{2.35}$$

于是 $pb_1 + qb_3 = 0$, 记 $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$，作酉变换 $Z' = UZ$，其中

$$U = \begin{pmatrix} -\bar{p}/\lambda & 0 & 0 & \bar{b}_3/\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b_1/\mu & 0 & 0 & q/\mu \end{pmatrix},$$

$$\lambda^2 = |b_3|^2 + |p|^2 \neq 0, \quad \mu^2 = |b_1|^2 + |q|^2 \neq 0, \tag{2.36}$$

相对于标架 Z' 有

$$d\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ Z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11}' & -\lambda\varphi & 0 & \omega_{14}' \\ \lambda\bar{\varphi} & \omega_{22}' & a\varphi & 0 \\ 0 & -\bar{a}\bar{\varphi} & \omega_{33}' & \mu\varphi \\ \omega_{41}' & 0 & -\mu\bar{\varphi} & \omega_{44}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ Z_4' \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

外微分 $\omega_{13}' = 0$ 可得 $\omega_{41}' = t\varphi$。关于 $Z_2 = Z_2'$ 的全纯 4-形式为

$$\omega_{12}'\omega_{23}'\omega_{34}'\omega_{41}' = -\lambda a\mu t\varphi^4, \tag{2.38}$$

由此可得 $t = 0$，即 $Z_1'Z_2'Z_3'Z_4'$ 是沿全纯曲线 $[Z_1'] : S^2 \to CP^3$ 的 Frenet 标架。$[Z_1']$ 称作调和映射 F 的准线。

下面我们从准线 $[Z_1']$ 构造一个调和映射 $F(x) = Z_1Z_2$。令

$$Z_1 = (1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}(Z_1' + wZ_4'), \tag{2.39}$$

$$Z_4 = (1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}(-\bar{w}Z_1' + Z_4'), \tag{2.40}$$

由前面过程可知 Z_1 满足条件

$$(dZ_1, Z_4) \equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\ \bar{\varphi}, \tag{2.41}$$

即

$$dw + w(\omega'_{44} - \omega'_{11}) \equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\ \bar{\varphi}, \tag{2.42}$$

由引理 2.2.2 可得

$$\frac{1}{2}\Delta \log |w| = \lambda^2 + \mu^2, \tag{2.43}$$

根据 Hopf 极大值原理 $w = const$，因此 $w = 0$，即

$$Z_1 = Z'_1, \quad Z_4 = Z'_4. \tag{2.44}$$

可以验证

$$Z_1 = Z'_4, \quad Z_4 = Z'_1 \tag{2.45}$$

也满足条件。因此 $Z'_1Z'_2$ 或者 $Z'_4Z'_2$ 张成 F。

综上所述，给定调和映射 $F: S^2 \to G(2,4)$，满足 $\mathrm{rank}A = 1, \mathrm{rank}B = 2$，我们得到其准线，并且 F 由其准线的 Frenet 标架中的第四个和第二个向量张成。

2.4 G(2,5) 中的调和二维球面

本节中我们仿照上节过程化简 G(2,5) 中的调和二维球面的活动标架，并且求得其准线。由于 G(2,5) 中情况稍微复杂一些，由其准线返回构造调和映射时，我们做了一些假设。

设 $F: S^2 \longrightarrow G(2,5)$ 是既非全纯也非反全纯的调和映射，选择标架 $Z_1, ..., Z_5$ 使得 Z_1, Z_2 张成 $F(x)$，Z_3, Z_4, Z_5 张成 $F^{\perp}(x)$。基本变换 $\partial, \bar{\partial}$ 分别把 Z_i 映到 $a_{i\alpha}Z_\alpha$，$b_{i\alpha}Z_\alpha$。记

$$A = (a_{i\alpha}), \quad B = (b_{i\alpha}), \quad C = (c_{ij}) = (a_{i\alpha}\bar{b}_{j\alpha}), \tag{2.46}$$

由于 $\det C = 0$，我们只讨论 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 2$ 的情形。正如 ([11]) 中所述，选择标架使得 Z_3, Z_4 张成 ∂ 的像，Z_4, Z_5 张成 $\bar{\partial}$ 的像，进一步要求 ∂ 把 $[Z_1]$ 映到 $[Z_3]$。再由关系 (2.12)(2.13) 可得

$$A = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{14} & b_{15} \\ 0 & 0 & b_{25} \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

其中 $a_{13}a_{24}b_{14}b_{25} \neq 0$。标架 Z_A 的定义相差一个 $U(1) \times ... \times U(1)$ 变换，因此 $[Z_A]$ 在 CP^4 中定义良好。由调和条件可得

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & p\varphi & a_{13}\varphi & b_{14}\bar{\varphi} & b_{15}\bar{\varphi} \\ -\bar{p}\bar{\varphi} & \omega_{22} & a_{23}\varphi & a_{24}\varphi & b_{25}\bar{\varphi} \\ -\bar{a}_{13}\bar{\varphi} & -\bar{a}_{23}\bar{\varphi} & \omega_{33} & q\varphi & r\varphi \\ -\bar{b}_{14}\varphi & -\bar{a}_{24}\bar{\varphi} & -\bar{q}\bar{\varphi} & \omega_{44} & s\varphi \\ -\bar{b}_{15}\varphi & -\bar{b}_{25}\varphi & -\bar{r}\bar{\varphi} & -\bar{s}\bar{\varphi} & \omega_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

易证 5-形式 $\omega_{13}\omega_{35}\omega_{52}\omega_{24}\omega_{41} = a_{13}r\bar{b}_{25}a_{24}\bar{b}_{14}\varphi^5$ 全纯，因此 $r = 0$。由于

$$\begin{aligned} &a_{24}\omega_{12} + q\omega_{13} = 0, \quad \bmod \varphi, \\ &-\bar{b}_{14}\omega_{12} + s\omega_{52} = 0, \quad \bmod \varphi, \\ &-\bar{b}_{14}\omega_{13} = 0, \quad \bmod \varphi, \\ &a_{24}\omega_{52} = 0, \quad \bmod \varphi, \end{aligned}$$

我们得到

定理 2.4.1. *([11])* 映射 $[Z_4]: S^2 \longrightarrow CP^n$ 调和。

记 $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5)$，作酉变换 $Z' = UZ$，其中

$$U = \begin{pmatrix} \bar{s}/\mu & 0 & 0 & 0 & b_{14}/\mu \\ 0 & q/\lambda & -a_{24}/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a}_{24}/\lambda & -\bar{q}/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{b}_{14}/\mu & 0 & 0 & 0 & s/\mu \end{pmatrix},$$

$$\lambda^2 = |a_{24}|^2 + |q|^2 \neq 0, \quad \mu^2 = |b_{14}|^2 + |s|^2 \neq 0, \tag{2.49}$$

相对于标架 Z' 有

$$d\begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ Z'_3 \\ Z'_4 \\ Z'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_{11} & e\varphi & f\varphi & 0 & \omega'_{15} \\ -\bar{e}\bar{\varphi} & \omega'_{22} & \omega'_{23} & 0 & -\bar{g}\bar{\varphi} \\ -\bar{f}\bar{\varphi} & \omega'_{32} & \omega'_{33} & -\lambda\varphi & -\bar{h}\bar{\varphi} \\ 0 & 0 & \lambda\bar{\varphi} & \omega'_{44} & \mu\varphi \\ \omega'_{51} & g\varphi & h\varphi & -\mu\bar{\varphi} & \omega'_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ Z'_3 \\ Z'_4 \\ Z'_5 \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

外微分 $\omega'_{14} = 0, \omega'_{24} = 0$ 可得 $\omega'_{51} = r\varphi, \omega'_{23} = t\varphi$。注意 $Z'_3Z'_4Z'_5$ 是某条全纯曲线 Frenet 标架中的相伴随的元素，且调和映射 $[Z'_4 = Z_4] : S^2 \to CP^4$ 既非全纯也非反全纯映射。因此由全纯 3-形式 $\omega'_{34}\omega'_{45}\omega'_{53} = -\lambda\mu h\varphi^3$, 得到 $h = 0$。不妨设 $[Z'_3]$ 非全纯，于是有 $|f|^2 + |t|^2 = a^2 \neq 0$, 作标架变换 $Z'' = VZ'$，其中

$$V = \begin{pmatrix} t/a & -f/a & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{f}/a & -\bar{t}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

相对于标架 Z'' 有

$$d\begin{pmatrix} Z''_1 \\ Z''_2 \\ Z''_3 \\ Z''_4 \\ Z''_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega''_{11} & \omega''_{12} & 0 & 0 & -\bar{l}\bar{\varphi} \\ \omega''_{21} & \omega''_{22} & -a\varphi & 0 & -\bar{m}\bar{\varphi} \\ 0 & a\bar{\varphi} & \omega''_{33} & -\lambda\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\bar{\varphi} & \omega''_{44} & \mu\varphi \\ l\varphi & m\varphi & 0 & -\mu\bar{\varphi} & \omega''_{55} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z''_1 \\ Z''_2 \\ Z''_3 \\ Z''_4 \\ Z''_5 \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

外微分 $\omega''_{13}=0$，得到 $\omega''_{12}=k\varphi$。由全纯 4-形式 $\omega''_{23}\omega''_{34}\omega''_{45}\omega''_{52}=a\lambda\mu m\varphi^4$，得到 $m=0$。由全纯 5-形式 $\omega''_{12}\omega''_{23}\omega''_{34}\omega''_{45}\omega''_{51}=ka\lambda\mu l\varphi^5$，得到 $kl=0$。因此得到：如果 $k=0, l\neq 0$，则 $Z''_2Z''_3Z''_4Z''_5Z''_1$ 是沿全纯曲线 $[Z''_2]:S^2\to CP^4$ 的 Frenet 标架；如果 $l=0, k\neq 0$，则 $Z''_1Z''_2Z''_3Z''_4Z''_5$ 是沿全纯曲线 $[Z''_1]:S^2\to CP^4$ 的 Frenet 标架。

例 2.4.1. 令

$$F=\begin{bmatrix} -2\bar{z} & 1-3|z|^2 & \sqrt{6}z(1-|z|^2) & z^2(3-|z|^2) & 2z^3 \\ -2\bar{z}^3 & \bar{z}^2(3-|z|^2) & -\sqrt{6}\bar{z}(1-|z|^2) & 1-3|z|^2 & 2z \end{bmatrix},$$

则有

$$[Z_4]=\partial F\bigcap\bar{\partial}F=\begin{bmatrix} \sqrt{6}\bar{z}^2 & -\sqrt{6}\bar{z}(1-|z|^2) & 1-4|z|^2+|z|^4 & \sqrt{6}z(1-|z|^2) & \sqrt{6}z^2 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}
&[Z_3]=\begin{bmatrix} \bar{z}^4 & -2\bar{z}^3 & \sqrt{6}\bar{z}^2 & -2\bar{z} & 1 \end{bmatrix},\\
&[Z_5]=\begin{bmatrix} 1 & 2z & \sqrt{6}z^2 & 2z^3 & z^4 \end{bmatrix},\\
&[Z_1]=\begin{bmatrix} -2\bar{z}^3 & \bar{z}^2(3-|z|^2) & -\sqrt{6}\bar{z}(1-|z|^2) & 1-3|z|^2 & 2z \end{bmatrix},\\
&[Z_2]=\begin{bmatrix} -2\bar{z} & 1-3|z|^2 & \sqrt{6}z(1-|z|^2) & z^2(3-|z|^2) & 2z^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

记

$$\varphi=\frac{1}{\lambda}dz,\psi=\frac{1}{2\lambda}(\bar{z}dz-zd\bar{z}),\lambda=1+|z|^2,$$

则有 *[16]*

$$d\begin{pmatrix} Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ Z_4\\ Z_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\psi & 0 & 2\varphi & -\sqrt{6}\bar{\varphi} & 0\\ 0 & 2\psi & 0 & \sqrt{6}\varphi & -2\bar{\varphi}\\ -2\bar{\varphi} & 0 & -4\psi & 0 & 0\\ \sqrt{6}\varphi & -\sqrt{6}\bar{\varphi} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\varphi & 0 & 0 & 4\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ Z_4\\ Z_5 \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

经过变换 $Z'=UZ$ 后有

$$d\begin{pmatrix} Z'_1\\ Z'_2\\ Z'_3\\ Z'_4\\ Z'_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\psi & 0 & 2\varphi & 0 & 0\\ 0 & -4\psi & 0 & 0 & -2\bar{\varphi}\\ -2\bar{\varphi} & 0 & 2\psi & \sqrt{6}\varphi & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{6}\bar{\varphi} & 0 & \sqrt{6}\varphi\\ 0 & 2\varphi & 0 & -\sqrt{6}\bar{\varphi} & -2\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z'_1\\ Z'_2\\ Z'_3\\ Z'_4\\ Z'_5 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

经过变换 $Z''=VZ'$ 后有

$$d\begin{pmatrix} Z_1'' \\ Z_2'' \\ Z_3'' \\ Z_4'' \\ Z_5'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\psi & 0 & 0 & 0 & -2\bar\varphi \\ 0 & 4\psi & 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -2\bar\varphi & 2\psi & \sqrt{6}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6}\bar\varphi & 0 & \sqrt{6}\varphi \\ 2\varphi & 0 & 0 & -\sqrt{6}\bar\varphi & -2\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1'' \\ Z_2'' \\ Z_3'' \\ Z_4'' \\ Z_5'' \end{pmatrix},$$

因此 $Z_2''Z_3''Z_4''Z_5''Z_1''$ 是沿全纯曲线

$$[Z_2''=Z_5]=\begin{bmatrix} 1 & 2z & \sqrt{6}z^2 & 2z^3 & z^4 \end{bmatrix}: S^2\to CP^4$$

的 *Frenet* 标架。

下面我们从其准线构造一个调和映射 $F(x)=Z_1Z_2$，不妨假定 $[Z_1'']$ 为其准线。令

$$Z_1'=(1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(Z_1''+wZ_2''), \tag{2.52}$$

$$Z_2'=(1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(-\bar wZ_1''+Z_2''), \tag{2.53}$$

由上可知 Z_1' 满足条件

$$(dZ_1', Z_2')\equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\ \varphi, \tag{2.54}$$

即

$$dw+w(\omega_{22}''-\omega_{11}'')+w^2\bar k\bar\varphi\equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\ \varphi, \tag{2.55}$$

易见 $w=0$ 是其平凡解，此时有

$$Z_1'=Z_1'', \quad Z_2'=Z_2''. \tag{2.56}$$

但当 $k=0$ 时，由引理 2.2.2 可得

$$\frac{1}{2}\Delta\log|w|=a^2, \tag{2.57}$$

根据 Hopf 极大值原理 $w=0$。当 $k=0$ 时易见

$$Z_1'=Z_2'', \quad Z_2'=Z_1'' \tag{2.58}$$

也满足上面条件。下面只讨论 $Z_1'=Z_2''$ 这种平凡情形。

如果 $Z_1'=Z_1'', Z_2'=Z_2''$，则有

$$d\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ Z_4' \\ Z_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11}' & k\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -\bar k\bar\varphi & \omega_{22}' & u\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\bar u\bar\varphi & \omega_{33}' & x\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\bar x\bar\varphi & \omega_{44}' & y\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\bar y\bar\varphi & \omega_{55}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ Z_4' \\ Z_5' \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

令

$$Z_1 = (1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(Z_1' + wZ_5'), \tag{2.60}$$

$$Z_5 = (1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(-\bar{w}Z_1' + Z_5'), \tag{2.61}$$

由前面可知 Z_1 满足条件

$$(dZ_1, Z_5) \equiv 0, \qquad \mod \bar{\varphi}, \tag{2.62}$$

即

$$dw + w(\omega_{55}' - \omega_{11}') \equiv 0, \qquad \mod \bar{\varphi}, \tag{2.63}$$

由引理 2.2.2 可得

$$\frac{1}{2}\Delta \log|w| = |k|^2 + |y|^2, \tag{2.64}$$

根据 Hopf 极大值原理有 $w=0$，即

$$Z_1 = Z_1', \quad Z_5 = Z_5', \tag{2.65}$$

另外易见

$$Z_1 = Z_5', \quad Z_5 = Z_1' \tag{2.66}$$

也满足条件。令

$$Z_2 = (1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(Z_2' + wZ_3'), \tag{2.67}$$

$$Z_3 = (1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}(-\bar{w}Z_2' + Z_3'), \tag{2.68}$$

由前面可知 Z_2 满足条件

$$(dZ_2, Z_3) \equiv 0, \qquad \mod \varphi, \tag{2.69}$$

即

$$dw + w(\omega_{33}' - \omega_{22}') + w^2\bar{u}\bar{\varphi} \equiv 0, \qquad \mod \varphi, \tag{2.70}$$

易见 $w=0$ 是其平凡解，此时有

$$Z_2 = Z_2', \quad Z_3 = Z_3', \tag{2.71}$$

但当 $u=0$ 时，由引理 2.2.2 可得

$$\frac{1}{2}\Delta \log|w| = |x|^2 + |k|^2, \tag{2.72}$$

根据 Hopf 极大值原理 $w=0$。当 $u=0$ 时易见

$$Z_2 = Z_3', \quad Z_3 = Z_2' \tag{2.73}$$

也满足条件。

在这一节中，我们证明了对调和映射 $F \to G(2,5)$，满足 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 2$，可以找出其准线，并且给出例子演示我们的方法。但是当从其准线构造这个调和映射时会遇到一个微分方程，我们只讨论了它们的平凡解，由这些平凡解我们可以看到 F 的准线的 Frenet 标架中的任意两个向量可以张成一个调和映射。

2.5 Gauss 曲率的上界

本节中我们将给出 G(2,5) 中等距调和二维球面 Gauss 曲率的上界。Y. Zheng[40] 讨论了曲率的 pinching 条件和 ∂ 与 $\bar{\partial}$ 变换之间的一些关系，证明了 G(2,4) 和 G(2,6) 中调和二维球面的一些 pinching 定理。例如对 G(2,4) 中极小二维球面，当其 Gauss 曲率大于等于 2 时，只能等于 2 或 4。而我们讨论了在 G(2,5) 中各种条件下等距调和二维球面的曲率的上界。

设 $F: M \longrightarrow G(2,5)$ 是等距调和映射，选择沿 F 的标架 $Z = (Z_1, ..., Z_5)$ 使得

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & p\varphi & a_{13}\varphi & b_{14}\bar{\varphi} & b_{15}\bar{\varphi} \\ -\bar{p}\bar{\varphi} & \omega_{22} & a_{23}\varphi & a_{24}\varphi & b_{25}\bar{\varphi} \\ -\bar{a}_{13}\bar{\varphi} & -\bar{a}_{23}\bar{\varphi} & \omega_{33} & q\varphi & r\varphi \\ -\bar{b}_{14}\varphi & -\bar{a}_{24}\bar{\varphi} & -\bar{q}\bar{\varphi} & \omega_{44} & s\varphi \\ -\bar{b}_{15}\varphi & -\bar{b}_{25}\varphi & -\bar{r}\bar{\varphi} & -\bar{s}\bar{\varphi} & \omega_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix},$$

外微分上式，应用结构方程可得

$$\begin{aligned}
&[da_{13} + a_{13}(\omega_{33} - \omega_{11} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = 0, \\
&[da_{24} + a_{24}(\omega_{44} - \omega_{22} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = 0, \\
&[d\bar{b}_{14} + \bar{b}_{14}(\omega_{11} - \omega_{44} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = 0, \\
&[d\bar{b}_{25} + \bar{b}_{25}(\omega_{22} - \omega_{55} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = 0, \\
&[da_{23} + a_{23}(\omega_{33} - \omega_{22} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = (a_{24}\bar{q} - a_{13}\bar{p})\bar{\varphi} \wedge \varphi, \\
&[d\bar{b}_{15} + \bar{b}_{15}(\omega_{11} - \omega_{55} - \sqrt{-1}\rho)] \wedge \varphi = (\bar{p}\bar{b}_{25} - \bar{s}\bar{b}_{14})\bar{\varphi} \wedge \varphi.
\end{aligned}$$

由引理 2.2.2，在相应的零点之外有

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta \log|a_{13}| &= \tfrac{1}{2}K - 2|a_{13}|^2 - |a_{23}|^2 + |b_{14}|^2 + |b_{15}|^2 + |q|^2 - |p|^2 + |r|^2, \\
\tfrac{1}{2}\Delta \log|a_{24}| &= \tfrac{1}{2}K - 2|a_{24}|^2 - |a_{23}|^2 + |b_{14}|^2 + |b_{25}|^2 - |q|^2 + |p|^2 + |s|^2, \\
\tfrac{1}{2}\Delta \log|b_{14}| &= \tfrac{1}{2}K - 2|b_{14}|^2 - |b_{15}|^2 + |a_{13}|^2 + |a_{24}|^2 + |q|^2 + |p|^2 - |s|^2, \\
\tfrac{1}{2}\Delta \log|b_{25}| &= \tfrac{1}{2}K - 2|b_{25}|^2 - |b_{15}|^2 + |a_{23}|^2 + |a_{24}|^2 - |p|^2 + |s|^2 + |r|^2.
\end{aligned}$$

定理 2.5.1. 设 $F: S^2 \to G(2,5)$ 是等距调和映射。如果 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 2$，则 *Gauss* 曲率 $K < \frac{1}{2}$。

证明： 由条件知道 $a_{13}a_{24}b_{14}b_{25} \neq 0$，于是

$$\frac{1}{2}\Delta \log|a_{13}a_{24}b_{14}b_{25}| = 2K - |a_{13}|^2 - |a_{23}|^2 - |b_{25}|^2 - |b_{15}|^2 + |q|^2 + |s|^2 + 2|r|^2 \geqslant 2K - 1,$$

因此如果 $K \geqslant \frac{1}{2}$，则可得到 $K = \frac{1}{2}$ 且 $a_{24} = b_{14} = q = r = s = 0$。这与假设矛盾，因此 $K < \frac{1}{2}$。定理得证。

定理 2.5.2. 设 $F: S^2 \to G(2,5)$ 是等距调和映射。如果 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 1$，且 $\bar{\partial}F \subseteq \partial F$，或者 $A = 1, \mathrm{rank}B = 2$，且 $\partial F \subseteq \bar{\partial}F$，则 *Gauss* 曲率 $K < \frac{4}{3}$。

证明：由条件知道，如果 $a_{13}a_{24}b_{14} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |a_{13}a_{24}b_{14}| = \frac{3}{2}K - |a_{13}|^2 - 2|a_{23}|^2 - |a_{24}|^2 + |b_{25}|^2 + |q|^2 + |p|^2 + |r|^2 \geqslant \frac{3}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant \frac{4}{3}$，则可得到 $K = \frac{4}{3}$ 且 $a_{24} = a_{13} = b_{14} = b_{15} = b_{25} = q = r = p = 0$，这与假设矛盾，因此 $K < \frac{4}{3}$。

如果 $b_{25}a_{24}b_{14} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |b_{25}a_{24}b_{14}| = \frac{3}{2}K + |a_{13}|^2 - |b_{14}|^2 - |b_{15}|^2 - 2|b_{25}|^2 + |s|^2 + |p|^2 + |r|^2 \geqslant \frac{3}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant \frac{4}{3}$，则有 $K = \frac{4}{3}$ 且 $a_{24} = a_{13} = a_{23} = b_{14} = b_{25} = s = r = p = 0$，这与假设矛盾，因此 $K < \frac{4}{3}$。定理得证。

定理 2.5.3. 设 $F: S^2 \to G(2,5)$ 是等距调和映射。如果 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 1$，或者 $A = 1, \mathrm{rank}B = 2$，且 $\partial F \perp \bar{\partial}F$，则 *Gauss* 曲率 $K < \frac{4}{3}$。

证明：由条件知道，如果 $a_{13}a_{24}b_{25} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |a_{13}a_{24}b_{25}| = \frac{3}{2}K - 2|a_{13}|^2 - |a_{23}|^2 - |a_{24}|^2 - |b_{25}|^2 + 2|s|^2 + 2|r|^2 \geqslant \frac{3}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant \frac{4}{3}$，则有 $K = \frac{4}{3}$ 且 $a_{24} = a_{23} = b_{25} = s = r = 0$，这与假设矛盾，因此 $K < \frac{4}{3}$。

如果 $a_{13}b_{14}b_{25} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |a_{13}b_{14}b_{25}| = \frac{3}{2}K - 2|b_{25}|^2 - |b_{14}|^2 - |b_{15}|^2 - |a_{13}|^2 + 2|q|^2 + 2|r|^2 \geqslant \frac{3}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant \frac{4}{3}$，则有 $K = \frac{4}{3}$ 且 $b_{14} = b_{15} = a_{13} = q = r = 0$，这与假设矛盾，因此 $K < \frac{4}{3}$。定理得证。

定理 2.5.4. 设 $F: S^2 \to G(2,5)$ 是等距调和映射。如果 $\mathrm{rank}A = 2, \mathrm{rank}B = 1$ 或者 $A = 1, \mathrm{rank}B = 2$，且 ∂F 与 $\bar{\partial}F$ 相互间不垂直也不包含，则 *Gauss* 曲率 $K < \frac{4}{3}$。

证明：此种情况类似于定理 2.5.2。

注解 2.5.1. 如果 $b_{14} = b_{25} = 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |b_{15}| = \frac{1}{2}K + |a_{13}|^2 - 2|b_{15}|^2 + |s|^2 + |p|^2 + |r|^2 \geqslant \frac{1}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant 4$，则有 $K = 4$ 且 $a_{24} = a_{13} = a_{23} = s = r = p = 0$。如果 $b_{14} = b_{25} = 0, a_{13} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |b_{15}a_{13}| = K - |a_{13}|^2 - |a_{23}|^2 - |b_{15}|^2 + |s|^2 + |q|^2 + 2|r|^2 \geqslant K - 1,$$

因此如果 $K \geqslant 1$，则有 $K=1$ 且 $a_{24}=q=r=s=0$。

如果 $a_{13}=a_{24}=0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |a_{23}| = \frac{1}{2}K - 2|a_{13}|^2 + |b_{25}|^2 + |q|^2 + |p|^2 + |r|^2 \geqslant \frac{1}{2}K - 2,$$

因此如果 $K \geqslant 4$，则有 $K=4$ 且 $b_{14}=b_{15}=b_{25}=q=r=p=0$。如果 $a_{13}=a_{24}=0, b_{25}\neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |b_{25}a_{23}| = K - |a_{23}|^2 - |b_{15}|^2 - |b_{25}|^2 + |s|^2 + |q|^2 + 2|r|^2 \geqslant K-1,$$

因此如果 $K \geqslant 1$，则有 $K=1$ 且 $b_{14}=q=r=s=0$。

如果 $a_{24}b_{14}\neq 0$，则有

$$\frac{1}{2}\Delta \log |a_{24}b_{14}| = K + |a_{13}|^2 - |a_{23}|^2 - |a_{24}|^2 - |b_{14}|^2 - |b_{15}|^2 + |b_{25}|^2 + 2|p|^2 \geqslant K-1,$$

因此如果 $K \geqslant 1$，则有 $K=1$ 且 $a_{13}=b_{25}=p=0$。

第三章　CP^n 中的三维球面

Zh. Q. Li, An M. Huang[25] 证明了 CP^n 中 CR 型极小常截面曲率的三维球面 S^3 是等变的，由此得到在相差一个 S^3 的等距下，它可以具体构造出来。J. Fei, C. Peng, X. Xu[17] 通过 SU(2) 的酉表示把 CP^n 中弱 Lagrangian 极小常截面曲率的三维球面 S^3 的浸入约化到一个代数方程组，并且给出一些标准例子，由这些例子刻画了 CP^n 中弱 Lagrangian 极小常截面曲率的三维球面 S^3。本章中我们通过 SU(2) 的酉表示给出了 CP^n 中的三维球面 S^3 的一些新例子，既不是 Lagrangian，也不是 CR 型的，并且得到了 CR 型极小常截面曲率的三维球面 S^3 的相配标架，从而给出了它的刚性结果的一个新证明。

3.1　SU(2) 的酉表示

本节中我们回忆一下酉群 SU(2) 的表示。

酉群 SU(2) 由下式定义：

$$SU(2)=\{g=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2+|b|^2=1, a,b\in\mathbb{C}\} \tag{3.1}$$

显然它同胚于三维球面 $S^3=\{(a,b)\in\mathbb{C}^2 \mid |a|^2+|b|^2=1\}$。SU(2) 的李代数是

$$\mathfrak{su}(2)=\{\begin{pmatrix} ix & y \\ -\bar{y} & -ix \end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{C}\}, \tag{3.2}$$

其中 $i^2=-1$。定义 $\mathfrak{su}(2)$ 的一组基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$：□□□

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

它们满足

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]=2\varepsilon_3, [\varepsilon_3,\varepsilon_1]=2\varepsilon_2, [\varepsilon_2,\varepsilon_3]=2\varepsilon_1. \tag{3.4}$$

SU(2) 的 Maurer-Cartan 形式由下式给出：

$$\Phi \doteq dgg^{-1}=\begin{pmatrix} i\omega_1 & \omega_2+i\omega_3 \\ -\omega_2+i\omega_3 & -i\omega_1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

由 Maurer-Cartan 方程 $d\Phi=\Phi\wedge\Phi$ 得到：

$$d\omega_1=2\omega_2\wedge\omega_3, d\omega_2=2\omega_3\wedge\omega_1, d\omega_3=2\omega_1\wedge\omega_2. \tag{3.6}$$

设 V_n 是全体以 z 和 w 为自变量的所有 n 次齐次多项式组成的 $(n+1)$ 维复线性空间。V_n 的 Hermitian 内积 $\langle,\rangle$ 为：

$$\langle f,g\rangle \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k\bar{b}_k k!(n-k)!$$

其中 $f=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k w^{n-k}, g=\sum_{k=0}^{n}b_k z^k w^{n-k}\in V_n$。因此 $\{u_{k,n}=z^k w^{n-k}/\sqrt{k!(n-k)!}\mid 0\leqslant k\leqslant n\}$ 为 V_n 的一组酉基。$SU(2)$ 在 V_n 上的酉表示 ρ_n 为:

$$\rho_n(g)f(z,w)\doteq f((z,w)g^{-1})=f(\bar{a}z+\bar{b}w,-bz+aw)$$

其中 $g\in SU(2)$，$f\in V_n$。李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 在 V_n 上的作用由下式给出:

$$u_{k,n}d\rho_n(\varepsilon)\doteq\frac{d}{dt}(\rho_n(\exp t\varepsilon)(u_{k,n}))\mid_{t=0} \tag{3.7}$$

其中 $0\leqslant k\leqslant n$，$\varepsilon\in\mathfrak{su}(2)$。特别，

$$u_{k,n}d\rho_n(\varepsilon_1)=(n-2k)iu_{k,n}, \tag{3.8}$$
$$u_{k,n}d\rho_n(\varepsilon_2)=\sqrt{k(n-k+1)}u_{k-1,n}-\sqrt{(k+1)(n-k)}u_{k+1,n}, \tag{3.9}$$
$$u_{k,n}d\rho_n(\varepsilon_3)=\sqrt{k(n-k+1)}iu_{k-1,n}+\sqrt{(k+1)(n-k)}iu_{k+1,n}, \tag{3.10}$$

其中 $0\leqslant k\leqslant n$。

我们知道每个 $\mathfrak{su}(2)$ 的有限维表示都可以扩张成唯一的一个复表示 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$。因此我们得到复表示 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 也标记为 $d\rho_n$。选择 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一组基 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

并且分别标记 $d\rho_n(\sigma_1),d\rho_n(\sigma_2),-d\rho_n(\sigma_3)$ 为 H,A,B。由 (3.8)-(3.10) 我们得到

$$u_{k,n}H=(n-2k)u_{k,n},u_{k,n}A=\sqrt{(k+1)(n-k)}u_{k+1,n},u_{k,n}B=\sqrt{k(n-k+1)}u_{k-1,n}, \tag{3.12}$$

其中 $0\leqslant k\leqslant n$。从 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 和 $End(V_n)$ 间的李代数同态 $d\rho_n$ 我们得到:

$$[H,A]=2A,[H,B]=-2B,[A,B]=H. \tag{3.13}$$

$Aut(V_n)$ 上的 Maurer-Cartan 形式的拉回为:

$$d\rho_n\rho_n^{-1}=iH\omega_1+A\varphi-B\bar{\varphi}, \tag{3.14}$$

其中 $\varphi=\omega_2+i\omega_3$。

令 $\lambda_k\doteq n-2k, v_{\lambda_k,n}=u_{k,n}$，其中 $0\leqslant k\leqslant n$。$\Delta_n=\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots\lambda_n\}$ 中得元素称作酉表示 ρ_n 的权，λ_0 称为最高权。表示空间 V_n 分解为 $V_{\lambda_0,n}\bigoplus V_{\lambda_1,n}\bigoplus\cdots\bigoplus V_{\lambda_n,n}$，其中 $\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_k,n}=1$，并且 $V_{\lambda_k,n}=span_{\mathbb{C}}\{v_{\lambda_k,n}\}$ 称为对于权 λ_k 的权空间。因此 (3.12) 可以写为:

$$v_{\lambda,n}H=\lambda v_{\lambda,n},v_{\lambda,n}A=a_{\lambda,n}v_{\lambda-2,n},v_{\lambda,n}B=b_{\lambda,n}v_{\lambda+2,n},\lambda\in\Delta_n \tag{3.15}$$

其中 $a_{\lambda,n}=\sqrt{(n+1)^2-(\lambda-1)}/2$，$b_{\lambda,n}=\sqrt{(n+1)^2-(\lambda+1)}/2$。显然，$a_{\lambda+2,n}=b_{\lambda,n},a_{-n,n}=b_{n,n}=0$。

我们知道 $\{(V_n,\rho_n) \mid n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $SU(2)$ 的所有不等价的不可约酉表示，并且任何 $SU(2)$ 的酉表示是完全可约的。在相差一个同构之下任何 $SU(2)$ 的酉表示 ρ 可以写为 $\rho=\rho_{n_1}\bigoplus\rho_{n_2}\bigoplus\cdots\bigoplus\rho_{n_s}$，其中 $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_s$ 为一些非负整数。相应的表示空间为 $V=V_{n_1}\bigoplus V_{n_2}\bigoplus\cdots\bigoplus V_{n_s}$。类似，我们有权空间分解 $V=\bigoplus_{\alpha=1}^{s}(\bigoplus_\lambda V_{\lambda,n_\alpha})=\bigoplus_\lambda V_\lambda$，其中 $V_\lambda=\bigoplus_{\alpha=1}^{s}V_{\lambda,n_\alpha}$ 为相对于权 λ 的权空间。

3.2 CP^n 中的极小三维流形

本节中我们约定下列指标变化范围：

$$0\leqslant A,B,C,\ldots\leqslant n,\ 1\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\ldots\leqslant n,\ 1\leqslant i,j,k,\ldots\leqslant 3.$$

设 $f:M\to CP^n$ 为等距浸入，其中 $(M,d\tilde{s}^2)$ 为三维流形，$d\tilde{s}^2=\sum_{i=1}^{3}\tilde{\omega}_i^2$。选择 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的酉标架 $\{Z_0,Z_1,\ldots,Z_n\}$ 满足 $\langle Z_A,Z_B\rangle=\delta_{AB}$，且 $f=[Z_0]$。假定 $dZ_A=\theta_{AB}Z_B$，则

$$d\theta_{AB}=\theta_{AC}\wedge\theta_{CB},\qquad \theta_{AB}+\bar{\theta}_{BA}=0. \tag{3.16}$$

CP^n 上的 Fubini-Study 度量为 $ds_{FS}^2=\theta_{0\alpha}\bar{\theta}_{0\alpha}$，Kähler 形式为 $\Omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\theta_{0\alpha}\wedge\bar{\theta}_{0\alpha}$。设 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 为 TM 的一组局部正交标架，$\{\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}_3\}$ 为其对偶标架。假定 $f^*\Omega=J_{ij}\tilde{\omega}_i\wedge\tilde{\omega}_j$ 其中 $J_{ij}=f^*\Omega(e_i,e_j)$。显然，

$$0\leqslant|f^*\Omega|^2\doteq\sum_{ij}J_{ij}^2\leqslant 2. \tag{3.17}$$

我们知道 $|f^*\Omega|^2=0$ 当且仅当 f 是弱 Lagrangian (全实的)，并且 $|f^*\Omega|^2=2$ 当且仅当 f 是 CR 型的。

下面我们分析 f 极小的条件。由等距条件可得

$$d\tilde{s}^2=f^*ds_{FS}^2=\sum_{i=1}^{3}\tilde{\omega}_i^2. \tag{3.18}$$

度量 ds^2 的第一结构方程为

$$d\tilde{\omega}_i=-\tilde{\omega}_{ij}\wedge\tilde{\omega}_j. \tag{3.19}$$

令

$$\theta_{0\alpha}=f^*\theta_{0\alpha}=f_{\alpha i}\tilde{\omega}_i, \tag{3.20}$$

其中 $f_{\alpha i}$ 为局部定义的复函数。对 (3.20) 作外微分，由 (3.19) 可得

$$Df_{\alpha i}\wedge\tilde{\omega}_i\doteq f_{\alpha ij}\tilde{\omega}_j\wedge\tilde{\omega}_i=0, \tag{3.21}$$

其中，由定义

$$f_{\alpha ij}\tilde{\omega}_j = df_{\alpha i} - f_{\alpha j}\tilde{\omega}_{ji} + f_{\beta i}\theta_{\beta\alpha} - f_{\alpha i}\theta_{00}, \tag{3.22}$$

$$f_{\alpha ij} = f_{\alpha ji}. \tag{3.23}$$

我们知道 f 极小当且仅当 $\sum_{i=1}^{3} f_{\alpha ii} = 0, \alpha = 1, \ldots, n$, 见 [7]。

本节剩下的部分中我们假定 $M = S^3$ 具有常截面曲率为 c 的双不变度量，因此

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{\sqrt{c}}\omega_i, \tilde{\omega}_{12} = \sqrt{c}\omega_3, \tilde{\omega}_{31} = \sqrt{c}\omega_2, \tilde{\omega}_{23} = \sqrt{c}\omega_1. \tag{3.24}$$

定义 $\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_3$，且令

$$dZ_0 \equiv X_1\tilde{\omega}_1 + X_2\tilde{\omega}_2 + X_3\tilde{\omega}_3 \quad \mod Z_0 \tag{3.25}$$

$$X_i = f_{\alpha i}Z_\alpha, \tag{3.26}$$

则

$$\begin{aligned}
DX_i &\doteq dX_i - X_j\tilde{\omega}_{ji} - \theta_{00}X_i \\
&= df_{\alpha i}Z_\alpha + f_{\beta i}\theta_{\beta\alpha}Z_\alpha + f_{\beta i}\theta_{\beta 0}Z_0 - f_{\alpha j}\tilde{\omega}_{ji}Z_\alpha - f_{\alpha i}\theta_{00}Z_\alpha \\
&= Df_{\alpha i}Z_\alpha + f_{\beta i}\theta_{\beta 0}Z_0 \\
&= f_{\alpha ij}\tilde{\omega}_jZ_\alpha + f_{\beta i}\theta_{\beta 0}Z_0 \\
&\equiv f_{\alpha ij}\tilde{\omega}_jZ_\alpha \quad \mod Z_0
\end{aligned}$$

并且设

$$X = X_1, Y = (X_2 - iX_3)/2, W = (X_2 + iX_3)/2.$$

由 (3.24) 可得

$$\begin{aligned}
dZ_0 &\equiv X_1\tilde{\omega}_1 + X_2\tilde{\omega}_2 + X_3\tilde{\omega}_3 \quad \mod Z_0 \\
&\equiv X\tilde{\omega}_1 + Y\tilde{\varphi} + W\bar{\tilde{\varphi}} \quad \mod Z_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DX &= DX_1 = dX_1 - X_2\tilde{\omega}_{21} - X_3\tilde{\omega}_{31} - \theta_{00}X_1 \\
&= dX + \sqrt{c}X_2\tilde{\omega}_3 - \sqrt{c}X_3\tilde{\omega}_2 - \theta_{00}X \\
&= dX - i\sqrt{c}Y\tilde{\varphi} + i\sqrt{c}W\bar{\tilde{\varphi}} - \theta_{00}X \\
DX_2 &= dX_2 - X_1\tilde{\omega}_{12} - X_3\tilde{\omega}_{32} - \theta_{00}X_2 \\
&= dX_2 - \sqrt{c}X_1\tilde{\omega}_3 + \sqrt{c}X_3\tilde{\omega}_1 - \theta_{00}X_2 \\
DX_3 &= dX_3 - X_1\tilde{\omega}_{13} - X_3\tilde{\omega}_{23} - \theta_{00}X_3 \\
&= dX_3 + \sqrt{c}X_1\tilde{\omega}_2 - \sqrt{c}X_2\tilde{\omega}_1 - \theta_{00}X_3 \\
DY &= (DX_2 - iDX_3)/2 \\
&= dY - \frac{i}{2}\sqrt{c}X\bar{\tilde{\varphi}} + i\sqrt{c}Y\tilde{\omega}_1 - Y\theta_{00} \\
DW &= (DX_2 + iDX_3)/2 \\
&= dW + \frac{i}{2}\sqrt{c}X\tilde{\varphi} - i\sqrt{c}W\tilde{\omega}_1 - W\theta_{00}
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
DX &\equiv p_1\tilde{\omega}_1 + q_1\tilde{\varphi} + r_1\bar{\tilde{\varphi}} \qquad \mathrm{mod}\ Z_0 \\
DY &\equiv p_2\tilde{\omega}_1 + q_2\tilde{\varphi} + r_2\bar{\tilde{\varphi}} \qquad \mathrm{mod}\ Z_0 \\
DW &\equiv p_3\tilde{\omega}_1 + q_3\tilde{\varphi} + r_3\bar{\tilde{\varphi}} \qquad \mathrm{mod}\ Z_0,
\end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned}
&p_1 = f_{11}, q_1 = (f_{12} - if_{13})/2, r_1 = (f_{12} + if_{13})/2, \\
&p_2 = (f_{21} - if_{31})/2, q_2 = (f_{22} - f_{33} - 2if_{23})/4, r_2 = (f_{22} + f_{33})/4, \\
&p_3 = (f_{21} + if_{31})/2, q_3 = (f_{22} + f_{33})/4, r_2 = (f_{22} - f_{33} + 2if_{23})/4,
\end{aligned}$$

其中 $f_{ij} = f_{\alpha ij}Z_\alpha$。综上我们得到下面定理：

定理 3.2.1. 设 $f: S^3 \to CP^n$ 为等距浸入，则 f 极小当且仅当一下条件之一成立：(1) $p_1 + 4r_2 = 0$; (2) $p_1 + 4q_3 = 0$.

证明: 只需注意 $p_1 + 4r_2 = p_1 + 4q_3 = \sum_{i=1}^{3} f_{ii} = \sum_{i=1}^{3} f_{\alpha ii}Z_\alpha$。

3.3　CP^n 中的 CR 型极小 S^3

两个映射 $f, g: S^3 \to CP^n$ 称为是等价的，如果存在全纯等距 $A: CP^n \to CP^n$ 使得 $f = A \circ g$。f 称为是等变的，如果存在李群同态 $E: S^3 \to U(n+1)$ 使得 f 等价于 $\pi \circ E$，其中 $\pi: U(n+1) \to CP^n = U(n+1)/U(1) \times U(n)$。

在 [24] 中，Zh. Q. Li 给出以下例子，它是常截面曲率为 $c = 1/(m^2-1)$ 的 CR 型等变极小浸入：

例 3.3.1. 对给定整数 $m \geqslant 2$，定义

$$k = (m-2)(m+1), l = (m+2)(m-1),$$
$$\cos^2 t = \frac{m-1}{2m}, \sin^2 t = \frac{m+1}{2m},$$

其中 $t \in (0, \pi/2)$。设

$$f_1 = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\binom{k}{j}} z^j w^{k-j} \varepsilon_j, f_2 = \sum_{j=0}^{l} \sqrt{\binom{l}{j}} z^j w^{l-j} \varepsilon'_j,$$

其中 $(z, w) \in S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z\bar{z} + w\bar{w} = 1\}$，且 $\{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon'_0, \ldots, \varepsilon'_l\}$ 为 $\mathbb{C}^{k+l+2} = \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{l+1}$ 的一组自然基。定义 $f = [e_0] : S^3 \to CP^{k+l+1}$，其中 $e_0 = (\cos t f_1, \sin t f_2)$。

Zh. Q. Li 证明了

定理 3.3.1. 设 $f : S^3 \to CP^n$ 是常截面曲率为 c 的 CR 型等变极小浸入。如果 f 线性满的，则 $c = 2/(n+1)$，其中 $n = 2m^2 - 3$，$m \geqslant 2$. 并且在相差 S^3 的一个等距下，f 与上面例子中的等距等价。

假定 $f : S^3 \to CP^n$ 为线性满的 CR 型极小浸入，由 f 诱导的度量为:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{3} \omega_j \omega_j. \tag{3.27}$$

选择 S^3 上的一组酉标架 $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ 使得 $f = [e_0]$。因为 f 为 CR 型的，假设

$$\theta_{00} = \frac{i}{c} \omega_1 = \frac{i}{\sqrt{c}} \tilde{\omega}_1. \tag{3.28}$$

设

$$\theta_{0\alpha} = a_{\alpha j} \tilde{\omega}_j = \frac{1}{\sqrt{c}} a_{\alpha j} \omega_j, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{3.29}$$

$$e'_j = a_{\alpha j} e_\alpha, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3, \tag{3.30}$$

则由 CR 型条件可得

$$de_0 = \theta_{00} e_0 + \theta_{0\alpha} e_\alpha = \frac{i}{c} \omega_1 e_0 + \frac{1}{\sqrt{c}} \omega_1 e'_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \varphi e'_2 \tag{3.31}$$

因此下面我们假定 $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ 满足:

$$de_0 = \frac{i}{c} \omega_1 e_0 + p_1 \omega_1 e_1 + r_2 \varphi e_2, \tag{3.32}$$

其中 $p_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{c}}$。对 θ_{01}, θ_{02} 外微分可得

$$i p_1 \varphi \wedge \bar{\varphi} = p_1 (\theta_{00} - \theta_{11}) \wedge \omega_1 + r_2 \varphi \wedge \theta_{21}, \tag{3.33}$$

$$2i r_2 \omega_1 \wedge \varphi = r_2 (\theta_{00} - \theta_{22}) \wedge \varphi + p_1 \omega_1 \wedge \theta_{12}, \tag{3.34}$$

即，

$$\theta_{12} = p_2\varphi, \quad p_2 = i\frac{p_1}{r_2}, \tag{3.35}$$

$$(\theta_{00} - \theta_{11}) \wedge \omega_1 = 0, \tag{3.36}$$

$$\theta_{00} - \theta_{22} = i(2 - \frac{p_1^2}{r_2^2})\omega_1. \tag{3.37}$$

对 $\theta_{0\alpha} = 0, 3 \leqslant \alpha \leqslant n$ 外微分可得

$$p_1\omega_1 \wedge \theta_{1\alpha} + r_2\varphi \wedge \theta_{2\alpha} = 0. \tag{3.38}$$

另外注意由定理 3.2.1 可得

$$\theta_{00} - \theta_{11} = 2i\omega_1, \tag{3.39}$$

$$\theta_{1\alpha} \wedge \varphi = 0. \tag{3.40}$$

选择 e_3 使得

$$\theta_{13} = r_2p_3\varphi, \quad \theta_{1\alpha} = 0, 4 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{3.41}$$

由 (3.38) 和 (3.40)，可以选择 e_4 使得

$$\theta_{23} = p_1p_3\omega_1 + p_1r_3\varphi, \tag{3.42}$$

$$\theta_{24} = p_1r_4\varphi, \quad \theta_{2\alpha} = 0, 5 \leqslant \alpha \leqslant n. \tag{3.43}$$

对 $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}$ 外微分可得

$$|r_2p_3|^2 = \frac{1}{c} - 2 - |p_2|^2, \tag{3.44}$$

$$r_3 = 0, \quad \theta_{23} = p_1p_3\omega_1, \tag{3.45}$$

$$\theta_{11} - \theta_{33} = i(2 + \frac{p_1^2}{r_2^2})\omega_1. \tag{3.46}$$

对 $\theta_{1\alpha} = 0, 4 \leqslant \alpha \leqslant n$ 外微分可得

$$\theta_{3\alpha} \wedge \varphi = 0, \tag{3.47}$$

因此可设 $\theta_{34} = p_4\varphi$。对 $\theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{24}$ 外微分可得

$$|p_1r_4|^2 = \frac{1}{c} + |r_2|^2 + |p_2|^2 - (2 - \frac{p_1^2}{r_2^2}), \tag{3.48}$$

$$p_4 = 2i\frac{p_3}{r_4}, \tag{3.49}$$

$$\theta_{22} - \theta_{44} = i(2 - 2\frac{p_3^2}{r_4^2})\omega_1. \tag{3.50}$$

对 $\theta_{2\alpha}=0, 5\leqslant\alpha\leqslant n$ 外微分可得

$$p_3\omega_1\wedge\theta_{3\alpha}+r_4\varphi\wedge\theta_{4\alpha}=0. \tag{3.51}$$

由 (3.47) 可以选择 e_5 使得

$$\theta_{35}=r_4p_5\varphi,\quad \theta_{3\alpha}=0, 6\leqslant\alpha\leqslant n, \tag{3.52}$$

并且由 (3.51) 选择 e_6 使得

$$\theta_{45}=p_3p_5\omega_1+p_3r_5\varphi, \tag{3.53}$$

$$\theta_{46}=p_3r_6\varphi,\quad \theta_{4\alpha}=0, 7\leqslant\alpha\leqslant n. \tag{3.54}$$

对 $\theta_{33},\theta_{34},\theta_{35}$ 外微分可得

$$|r_4p_5|^2=\frac{1}{c}+|r_2p_3|^2+|p_4|^2-(4+\frac{p_1^2}{r_2^2}), \tag{3.55}$$

$$r_5=0,\quad \theta_{45}=p_3p_5\omega_1, \tag{3.56}$$

$$\theta_{33}-\theta_{55}=i(2+2\frac{p_3^2}{r_4^2})\omega_1. \tag{3.57}$$

对 $\theta_{3\alpha}=0, 6\leqslant\alpha\leqslant n$ 外微分可得

$$\theta_{5\alpha}\wedge\varphi=0, \tag{3.58}$$

因此可设 $\theta_{56}=p_6\varphi$。对 $\theta_{44},\theta_{45},\theta_{46}$ 外微分可得

$$|p_3r_6|^2=\frac{1}{c}+|p_1r_4|^2+|p_4|^2-(4-\frac{p_1^2}{r_2^2}-2\frac{p_3^2}{r_4^2}), \tag{3.59}$$

$$p_6=3i\frac{p_5}{r_6}, \tag{3.60}$$

$$\theta_{44}-\theta_{66}=i(2-3\frac{p_5^2}{r_6^2})\omega_1. \tag{3.61}$$

对 $\theta_{4\alpha}=0, 7\leqslant\alpha\leqslant n$ 外微分可得

$$p_5\omega_1\wedge\theta_{5\alpha}+r_6\varphi\wedge\theta_{6\alpha}=0. \tag{3.62}$$

由 (3.58) 可以选择 e_7 使得

$$\theta_{57}=r_6p_7\varphi,\quad \theta_{5\alpha}=0, 8\leqslant\alpha\leqslant n, \tag{3.63}$$

并且由 (3.63) 选择 e_8 使得

$$\theta_{67}=p_5p_7\omega_1+p_5r_7\varphi, \tag{3.64}$$

$$\theta_{68}=p_5r_8\varphi,\quad \theta_{6\alpha}=0, 9\leqslant\alpha\leqslant n. \tag{3.65}$$

由上述过程，我们得到下面的定理：

定理 3.3.2. 设 $f: S^3 \to CP^n$ 为线性满的具有常曲率截面 c 的 CR 型极小浸入，则存在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的酉标架 $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ 使得 $U(n+1)$ 的 Maurer-Cartan 形式的拉回为：

$$\begin{aligned}
&\theta_{00} = \frac{i}{c}\omega_1, \theta_{01} = p_1\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}\omega_1, \theta_{02} = r_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{c}}\varphi,\\
&\theta_{2k-1,2k} = p_{2k}\varphi, \quad \theta_{2k-1,2k+1} = r_{2k}p_{2k+1}\varphi,\\
&\theta_{2k,2k+1} = p_{2k-1}p_{2k+1}\omega_1, \quad \theta_{2k,2k+2} = p_{2k-1}r_{2k+2}\varphi,\\
&\theta_{00} - \theta_{2k-1,2k-1} = i(\sum_{j=1}^{k-1} j\frac{p_{2j-1}^2}{r_{2j}^2} + 2k)\omega_1,\\
&\theta_{00} - \theta_{2k,2k} = i(-\sum_{j=1}^{k} j\frac{p_{2j-1}^2}{r_{2j}^2} + 2k)\omega_1,
\end{aligned}$$

其中

$$|r_{2k}p_{2k+1}|^2 = \frac{1}{c} + |r_{2k-2}p_{2k-1}|^2 - |p_{2k}|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} j\frac{p_{2j-1}^2}{r_{2j}^2} - 2k, \tag{3.66}$$

$$|p_{2k-1}r_{2k+2}|^2 = \frac{1}{c} + |p_{2k-3}r_{2k}|^2 + |p_{2k}|^2 + \sum_{j=1}^{k} j\frac{p_{2j-1}^2}{r_{2j}^2} - 2k, \tag{3.67}$$

$$p_{2k} = k\frac{p_{2k-1}}{r_{2k}}i, \quad r_0 = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad k \geqslant 1. \tag{3.68}$$

从定理 3.3.2，我们知道 CR 型极小浸入是等变的，且由 (3.66) 可得当 $k = 1$ 时有 $0 \leqslant c \leqslant \frac{1}{3}$。再由定理 3.3.1 可得到刚性结果 [25]：

定理 3.3.3. 设 $f: S^3 \to CP^n$ 具有常曲率截面 c 的 CR 型极小浸入。如果 f 是线性满的，则 $c = 2/(n+1)$，其中 $n = 2m^2 - 3, m \geqslant 2$. 并且在相差一个 S^3 同构下 f 等价于例 3.3.1.

3.4 例子的构造

本节中我们通过 SU(2) 的酉表示构造一些 CP^n 中极小 S^3 的例子。设

$$Z_0 = a v_{t,l}\rho_l + b v_{s,k}\rho_k, \tag{3.69}$$

其中 $|a|^2+|b|^2=1, l+k-1=n$ 且 $\nu_{t,l}, \nu_{s,k}$ 由第一节定义。于是

$$
\begin{aligned}
dZ_0 =& a\nu_{t,l}d\rho_l + b\nu_{s,k}d\rho_k \\
=& a\nu_{t,l}(iH\omega_1 + A\varphi - B\bar{\varphi})\rho_l + b\nu_{s,k}(iH\omega_1 + A\varphi - B\bar{\varphi})\rho_k \\
=& i(ta\nu_{t,l} + sb\nu_{s,k})\omega_1 + (a_{t,l}a\nu_{t-2,l} + a_{s,k}b\nu_{s-2,k})\varphi \\
& - (b_{t,l}a\nu_{t+2,l} + b_{s,k}b\nu_{s+2,k})\bar{\varphi} \\
\theta_{00} =& \langle dZ_0, Z_0\rangle = i(t|a|^2 + s|b|^2)\omega_1 \doteq iN\omega_1 \\
\langle dZ_0, dZ_0\rangle =& (t^2|a|^2 + s^2|b|^2)\omega_1^2 + [(a_{t,l}^2 + b_{t,l}^2)|a|^2 + (a_{s,k}^2 + b_{s,k}^2)|b|^2]\varphi\bar{\varphi} \\
=& (t^2|a|^2 + s^2|b|^2)\omega_1^2 + (\frac{l^2+2l-t^2}{2}|a|^2 + \frac{k^2+2k-s^2}{2}|b|^2)\varphi\bar{\varphi} \\
ds^2 =& [t^2|a|^2 + s^2|b|^2 - (t|a|^2 + s|b|^2)^2]\omega_1^2 \\
& + (\frac{l^2+2l-t^2}{2}|a|^2 + \frac{k^2+2k-s^2}{2}|b|^2)\varphi\bar{\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
dZ_0 \equiv X\tilde{\omega}_1 + Y\tilde{\varphi} + W\bar{\tilde{\varphi}} \qquad \mathrm{mod}\ Z_0
$$

其中

$$
\begin{aligned}
X =& \sqrt{c}[i(t-N)a\nu_{t,l}\rho_l + i(s-N)b\nu_{s,k}\rho_k] \\
Y =& \sqrt{c}[a_{t,l}a\nu_{t-2,l}\rho_l + a_{s,k}b\nu_{s-2,k}\rho_k] \\
W =& \sqrt{c}[-b_{t,l}a\nu_{t+2,l}\rho_l - b_{s,k}b\nu_{s+2,k}\rho_k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
DX =& dX - i\sqrt{c}Y\tilde{\varphi} + i\sqrt{c}W\bar{\tilde{\varphi}} - \theta_{00}X \\
=& -c[(t-N)^2a\nu_{t,l}\rho_l + (s-N)^2b\nu_{s,k}\rho_k]\tilde{\omega}_1 \\
& + ic[(t-N-1)a_{t,l}a\nu_{t-2,l}\rho_l + (s-N-1)a_{s,k}b\nu_{s-2,k}\rho_k]\tilde{\varphi} \\
& - ic[(t-N+1)b_{t,l}a\nu_{t+2,l}\rho_l + (s-N+1)b_{s,k}b\nu_{s+2,k}\rho_k]\bar{\tilde{\varphi}} \\
DY =& dY - \frac{i}{2}\sqrt{c}X\bar{\tilde{\varphi}} + i\sqrt{c}Y\tilde{\omega}_1 - \theta_{00}Y \\
=& ic[(t-N-1)a_{t,l}a\nu_{t-2,l}\rho_l + (s-N-1)a_{s,k}b\nu_{s-2,k}\rho_k]\tilde{\omega}_1 \\
& + c[a_{t-2,l}a_{t,l}a\nu_{t-4,l}\rho_l + a_{s-2,k}a_{s,k}b\nu_{s-4,k}\rho_k]\tilde{\varphi} \\
& + c[(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}N - b_{t-2,l}a_{t,l})a\nu_{t,l}\rho_l + (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}N - b_{s-2,k}a_{s,k})b\nu_{s,k}\rho_k]\bar{\tilde{\varphi}} \\
DW =& dW + \frac{i}{2}\sqrt{c}X\tilde{\varphi} - i\sqrt{c}W\tilde{\omega}_1 - \theta_{00}W \\
=& -ic[(t-N+1)b_{t,l}a\nu_{t+2,l}\rho_l + (s-N+1)b_{s,k}b\nu_{s+2,k}\rho_k]\tilde{\omega}_1 \\
& - c[(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}N + a_{t+2,l}b_{t,l})a\nu_{t,l}\rho_l + (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}N + a_{s+2,k}b_{s,k})b\nu_{s,k}\rho_k]\tilde{\varphi} \\
& + c[b_{t+2,l}b_{t,l}a\nu_{t+4,l}\rho_l + b_{s+2,k}b_{s,k}b\nu_{s+4,k}\rho_k]\bar{\tilde{\varphi}}
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
p_1 =& -c[(t-N)^2 a\nu_{t,l}\rho_l + (s-N)^2 b\nu_{s,k}\rho_k] + c(t-s)^2|a|^2|b|^2(a\nu_{t,l}\rho_l + b\nu_{s,k}\rho_k),\\
q_1 =& ic[(t-N-1)a_{t,l}a\nu_{t-2,l}\rho_l + (s-N-1)a_{s,k}b\nu_{s-2,k}\rho_k],\\
r_1 =& -ic[(t-N+1)b_{t,l}a\nu_{t+2,l}\rho_l + (s-N+1)b_{s,k}b\nu_{s+2,k}\rho_k],\\
p_2 =& ic[(t-N-1)a_{t,l}a\nu_{t-2,l}\rho_l + (s-N-1)a_{s,k}b\nu_{s-2,k}\rho_k],\\
q_2 =& c(a_{t-2,l}a_{t,l}a\nu_{t-4,l}\rho_l + a_{s-2,k}a_{s,k}b\nu_{s-4,k}\rho_k),\\
r_2 =& c(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}N - b_{t-2,l}a_{t,l})a\nu_{t,l}\rho_l + (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}N - b_{s-2,k}a_{s,k})b\nu_{s,k}\rho_k\\
&+ c(b_{t-2,l}a_{t,l}|a|^2 + b_{s-2,k}a_{s,k}|b|^2)(a\nu_{t,l}\rho_l + b\nu_{s,k}\rho_k),\\
p_3 =& -ic[(t-N+1)b_{t,l}a\nu_{t+2,l}\rho_l + (s-N+1)b_{s,k}b\nu_{s+2,k}\rho_k],\\
q_3 =& -c[(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}N + a_{t+2,l}b_{t,l})a\nu_{t,l}\rho_l + (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}N + a_{s+2,k}b_{s,k})b\nu_{s,k}\rho_k]\\
&+ c(a_{t+2,l}b_{t,l}|a|^2 + a_{s+2,k}b_{s,k}|b|^2)(a\nu_{t,l}\rho_l + b\nu_{s,k}\rho_k),\\
r_3 =& c(b_{t+2,l}b_{t,l}a\nu_{t+4,l}\rho_l + b_{s+2,k}b_{s,k}b\nu_{s+4,k}\rho_k).
\end{aligned}
$$

由定理 3.2.1，我们有

定理 3.4.1. 设 $f = [Z_0] : S^3 \to CP^n$ 为浸入映射，则 f 等距极小当且仅当以下条件成立：

$$
\begin{aligned}
&(1): t^2|a|^2 + s^2|b|^2 - (t|a|^2 + s|b|^2)^2 = \frac{l^2+2l-t^2}{2}|a|^2 + \frac{k^2+2k-s^2}{2}|b|^2;\\
&(2): (t-s)^2(|a|^2-|b|^2) - l^2 - 2l + t^2 + k^2 + 2k - s^2 = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $|a|^2 + |b|^2 = 1$。

由上述定理可得

$$
\begin{aligned}
|a|^2 &= \frac{(t-s)^2 + l^2 + 2l - t^2 - k^2 - 2k + s^2}{2(t-s)^2},\\
|b|^2 &= \frac{(t-s)^2 - l^2 - 2l + t^2 + k^2 + 2k - s^2}{2(t-s)^2}.
\end{aligned}
$$

下面例子中我们记 $\{\phi_{i,n}, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 为由全纯映射 $[\phi_{0,n}] : S^2 \to CP^n$ 定义的 Veronese 序列。

例 3.4.1. 对给定整数 $m \geqslant 2$ 定义

$$t = l = (m+2)(m-1), \quad s = k = (m-2)(m+1),$$

则

$$
\begin{aligned}
|a|^2 &= \frac{m+1}{2m}, \quad |b|^2 = \frac{m-1}{2m},\\
Z_0 &= a\nu_{l,l}\rho_l + b\nu_{k,k}\rho_k = a\phi_{0,l} + b\phi_{0,k},
\end{aligned}
$$

曲率

$$c = \frac{1}{t^2|a|^2 + s^2|b|^2 - (t|a|^2 + s|b|^2)^2} = \frac{1}{m^2 - 1}$$

且 *Kähler* 形式的拉回为

$$\begin{aligned}\Omega =& f^*\Omega = -\frac{i}{2}d\theta_{00} = \frac{1}{2}N d\omega_1 \\ =& N\omega_2 \wedge \omega_3 = Nc\tilde{\omega}_2 \wedge \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_2 \wedge \tilde{\omega}_3.\end{aligned}$$

因此可得 $|\Omega|^2 = 2$，即 $f = [Z_0]$ 是 *CR* 型的。

注意上例首先由 Zh. Q. Li [24] 给出。

例 3.4.2. 给定整数 m 使得 $l, k \geqslant 0$ 定义

$$\begin{aligned} t =& l - 2, \quad l = 3m^2 + 13m + 8 \quad (\text{or} = 3m^2 - 7m - 2), \\ s =& k - 2, \quad k = 3m^2 + 7m - 2 \quad (\text{or} = 3m^2 - 13m + 8),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}|a|^2 =& \frac{m+1}{2m}, \quad |b|^2 = \frac{m-1}{2m}, \\ Z_0 =& a\nu_{l-2,l}\rho_l + b\nu_{k-2,k}\rho_k = a\phi_{1,l} + b\phi_{1,k}.\end{aligned}$$

曲率

$$c = \frac{1}{t^2|a|^2 + s^2|b|^2 - (t|a|^2 + s|b|^2)^2} = \frac{1}{(3m+2)(3m+8)} \quad (\text{or} = \frac{1}{(3m-2)(3m-8)})$$

且 *Kähler* 形式拉回的模长平方为

$$|\Omega|^2 = 2|Nc|^2 = 2|\frac{3m^2 + 10m + 4}{(3m+2)(3m+8)}|^2 \quad (\text{or} = 2|\frac{3m^2 - 10m + 4}{(3m-2)(3m-8)}|^2).$$

容易验证 $0 < |\Omega|^2 < 2$，因此浸入 $f = [Z_0]$ 既不是弱 *Lagrangian* 的也不是 *CR* 型的。

第四章　Q_2 中平行平均曲率向量曲面

T. Ogata [31] 开始了二维复射影空间 CP^2 中具有平行平均曲率向量曲面的研究，得到一组常微分方程，并且证明了如果 CP^2 中具有非零平行平均曲率向量曲面的 Gauss 曲率为常数，则它必为全实的且 Gauss 曲率为零。K. Kenmotsu, D. Zhou[23] 和 S. Hirakawa [20] 对 T. Ogata [31] 中给出的常微分方程组作了充分的研究，在此基础上证明了 CP^2 中具有平行平均曲率向量曲面或者是极小的或者是平坦的。本章我们研究了复射影空间 CP^3 中超二次曲面 Q_2 中的平行平均曲率向量的曲面，得到了一组类似的微分方程，并且引入一个角度 θ 来刻画二维复空间形式和超二次曲面 Q_2 的不同。如果 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$，则存在一簇从单连通曲面到 Q_2 的具有平行平均曲率向量场的等距浸入。

4.1　基础知识

本章中我们约定以下指标变化范围：

$$1 \leqslant A, B, \ldots \leqslant 4; 1 \leqslant i, j, \ldots \leqslant 2; 3 \leqslant \alpha, \beta, \ldots \leqslant 4.$$

Q_2 为 CP^3 中超二次曲面，它等同于 $\mathbb{R}^4$ 中定向二维平面组成的 Grassmann 流形 $G(2,4)$：$[v + iw] \leftrightarrow [v \wedge w]$，其中 $[v + iw]$ 表示由 $\mathbb{C}^4$ 中齐性向量 $v + iw$ 给出的 Q_2 中的点，$[v \wedge w]$ 表示 $\mathbb{R}^4$ 中由 $v, w \in \mathbb{R}^4$ 张成的定向二维平面。

作为齐性空间 $Q_2 = SO(4)/SO(2) \times SO(2)$，令 $\{\Omega^A_B\}$ 表示 $SO(4)$ 的 Maurer-Cartan 形式，满足

$$d\Omega^A_B = \sum \Omega^A_C \wedge \Omega^C_B, \quad \Omega^A_B + \Omega^B_A = 0. \tag{4.1}$$

设 $\omega^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega^\alpha_1 + i\Omega^\alpha_2)$，则 Q_2 上的诱导度量为 $ds^2 = \sum \omega^\alpha \bar{\omega}^\alpha$，其中 ω^α 为 (1,0) 型形式。(Q_2, ds^2) 的结构方程为：

$$d\omega^\alpha = -\sum \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, \quad \omega^\alpha_\beta + \bar{\omega}^\beta_\alpha = 0, \tag{4.2}$$

$$d\omega^\alpha_\beta = -\sum \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta + \Phi^\alpha_\beta, \tag{4.3}$$

其中联络和曲率形式为：

$$\omega^\alpha_\beta = i\delta^\alpha_\beta \Omega^1_2 - \Omega^\alpha_\beta, \tag{4.4}$$

$$\Phi^\alpha_\beta = \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta + \bar{\omega}^\alpha \wedge \omega^\beta + \delta^\alpha_\beta \sum \omega^\gamma \wedge \bar{\omega}^\gamma. \tag{4.5}$$

设 (M, ds^2_M) 为定向连通的二维黎曼流形，$F : M \hookrightarrow Q_2$ 为等距浸入。假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 为 M 的一组局部定向标架，其中 $\{e_1, e_2\}$ 是 M 切丛的一组基，

$\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ 为其对偶标架。M 上的度量为 $ds^2 = \varphi\bar{\varphi}$，其中 $\varphi = \theta^1 + i\theta^2$。M 的结构方程为：

$$d\varphi = i\theta_2^1 \wedge \bar{\varphi}, \quad d\theta_2^1 = \frac{i}{2}K\varphi \wedge \bar{\varphi}. \tag{4.6}$$

Kähler 函数 $\cos\alpha = \langle e_1, Je_2\rangle$，其中 J 为 Q_2 的复结构。我们知道存在矩阵 $U \in U(2)$ 使得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}^3 \\ \tilde{\omega}^4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega^3 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

并且

$$\tilde{\omega}^3 = \cos\frac{\alpha}{2}\varphi, \quad \tilde{\omega}^4 = \sin\frac{\alpha}{2}\bar{\varphi}. \tag{4.8}$$

假定平均曲率向量 $H \neq 0$，且 $D^{\perp}H = 0$，其中 $D^{\perp}$ 表示 M 法丛的联络。选择 $e_3 = -H/|H|$，且

$$\cos\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}^3 + \sin\frac{\alpha}{2}\bar{\tilde{\omega}}^4 = \theta^1 + i\theta^2, \tag{4.9}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}^3 - \cos\frac{\alpha}{2}\bar{\tilde{\omega}}^4 = \theta^3 + i\theta^4, \tag{4.10}$$

对其外微分可以得到

$$\theta_2^1 = i(\cos^2\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}_3^3 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}_4^4), \tag{4.11}$$

$$\theta_1^3 + i\theta_1^4 = -[\frac{1}{2}d\alpha - \tilde{\omega}_4^3 - \frac{1}{2}\sin\alpha(\tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4)], \tag{4.12}$$

$$\theta_2^3 + i\theta_2^4 = -i[\frac{1}{2}d\alpha + \tilde{\omega}_4^3 - \frac{1}{2}\sin\alpha(\tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4)], \tag{4.13}$$

$$\theta_4^3 = i(\sin^2\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}_3^3 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}_4^4), \tag{4.14}$$

其中 $\{\theta_B^A\}$ 为相对于 $\{\theta^A\}$ 的黎曼联络，$\{\tilde{\omega}_\beta^\alpha\}$ 是相对于 $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ 的联络。由假设可知 e_3 是沿 M 平行的向量场，因此 e_4 也是，于是 $\theta_4^3 = 0$。限制 (4.9) 和 (4.10) 到 M 上有：

$$\cos\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}^3 + \sin\frac{\alpha}{2}\bar{\tilde{\omega}}^4 = \varphi, \tag{4.15}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\tilde{\omega}^3 - \cos\frac{\alpha}{2}\bar{\tilde{\omega}}^4 = 0, \tag{4.16}$$

对其外微分可得

$$\frac{1}{2}[d\alpha - \sin\alpha(\tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4)] = a\varphi + b\bar{\varphi}, \tag{4.17}$$

$$-\tilde{\omega}_4^3 = b\varphi + c\bar{\varphi}, \tag{4.18}$$

其中 a, b, c 为 M 上局部定义的复值函数，依赖于 $\{e_1, e_2\}$ 的选取。因此我们得到

$$\theta_1^3 + i\theta_1^4 = -(a\varphi + b\bar{\varphi} + b\varphi + c\bar{\varphi}), \tag{4.19}$$

$$\theta_2^3 + i\theta_2^4 = -i(a\varphi + b\bar{\varphi} - b\varphi - c\bar{\varphi}). \tag{4.20}$$

设 $\theta_i^\alpha = \sum h_{ij}^\alpha \theta^j$，其中 $\{h_{ij}^\alpha\}$ 为第二基本型的分量，则

$$h_{11}^3 = -\frac{1}{2}[a+\bar{a}+2(b+\bar{b})+c+\bar{c}], \tag{4.21}$$

$$h_{12}^3 = \frac{i}{2}(-a+\bar{a}+c-\bar{c}), \tag{4.22}$$

$$h_{22}^3 = \frac{1}{2}[a+\bar{a}-2(b+\bar{b})+c+\bar{c}], \tag{4.23}$$

$$h_{11}^4 = \frac{i}{2}[a-\bar{a}+2(b-\bar{b})+c-\bar{c}], \tag{4.24}$$

$$h_{12}^4 = \frac{1}{2}(-a-\bar{a}+c+\bar{c}), \tag{4.25}$$

$$h_{22}^4 = \frac{i}{2}[-a+\bar{a}+2(b-\bar{b})-c+\bar{c}]. \tag{4.26}$$

由标架的选取可得

$$H = -2be_3, \quad b = \bar{b} = const > 0. \tag{4.27}$$

对 (4.17) 和 (4.18) 外微分，由 (4.11) 和 (4.14) 可得

$$\theta_2^1 = -i\cot\alpha[(a-b)\varphi-(\bar{a}-b)\bar{\varphi}], \tag{4.28}$$

$$d\alpha = (a+b)\varphi+(\bar{a}+b)\bar{\varphi}, \tag{4.29}$$

$$(da+ia\theta_2^1)\wedge\varphi = \cot\alpha(ba-|a|^2)\varphi\wedge\bar{\varphi}-\frac{1}{2}\sin\alpha(\tilde{\Phi}_3^3+\tilde{\Phi}_4^4), \tag{4.30}$$

$$(dc-ic\theta_2^1)\wedge\bar{\varphi} = \cot\alpha(ac-bc)\varphi\wedge\bar{\varphi}-\tilde{\Phi}_4^3, \tag{4.31}$$

其中曲率矩阵的变换关系为 $\tilde{\Phi} = U\Phi U^{-1}$。注意到 Φ 在以下变换下的形式不变性，$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$，接下来我们假定

$$U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, |u|^2+|v|^2 = 1. \tag{4.32}$$

设 $X = u^2+v^2, Y = \bar{u}v-u\bar{v}$，限制到 M 上有

$$\tilde{\Phi}_3^3 = [(2-|X|^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}-(1-|Y|^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}]\varphi\wedge\bar{\varphi}, \tag{4.33}$$

$$\tilde{\Phi}_4^3 = (-X\bar{Y}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\bar{X}Y\sin^2\frac{\alpha}{2})\varphi\wedge\bar{\varphi}, \tag{4.34}$$

$$\tilde{\Phi}_4^4 = [(1-|Y|^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}-(2-|X|^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}]\varphi\wedge\bar{\varphi}. \tag{4.35}$$

对 (4.28) 外微分得到 M 的 Gauss 方程：

$$K = (6-2|X|^2-2|Y|^2)\cos^2\alpha+4b^2-4|a|^2. \tag{4.36}$$

对 $\theta_4^3 = 0$ 外微分得到

$$|a|^2-|c|^2+\frac{1}{2}(3-|X|^2-|Y|^2)\sin^2\alpha+|Y|^2-1 = 0. \tag{4.37}$$

我们知道局部上存在等温坐标 $z = x + iy$ 使得 $\varphi = \lambda dz$，其中 λ 为正函数。(4.28)-(4.31) 可以写成下面一组微分方程：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\lambda^2(a-b)\cot\alpha, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \lambda(a+b), \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = \lambda[2(|a|^2 - ba)\cot\alpha + \frac{1}{4}(3 - |X|^2 - |Y|^2)\sin 2\alpha], \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial(\lambda^2 c)}{\partial z} = X\bar{Y}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \bar{X}Y\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{4.41}$$

注意 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial\bar{z}\partial z}$ 当且仅当 $a = \bar{a}$，因此 a 为实值函数，且 λ, α, a 为依赖于 x 的单变量函数。

定理 4.1.1. 设 $F: M \hookrightarrow Q_2$ 为具有非零的平行平均曲率向量的等距浸入，且既非全纯也非反全纯。则在以上记号下，局部上存在等温坐标系 $z = x + iy$ 且有以下一组微分方程：

$$\frac{d\lambda}{dx} = -2\lambda^2(a-b)\cot\alpha, \tag{4.42}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = 2\lambda(a+b), \tag{4.43}$$

$$\frac{da}{dx} = 2\lambda[2(a^2 - ba)\cot\alpha + \frac{1}{4}(3 - |X|^2 - |Y|^2)\sin 2\alpha], \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial(\lambda^2 c)}{\partial z} = X\bar{Y}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \bar{X}Y\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{4.45}$$

其中 $|c|^2 = a^2 + \frac{1}{2}(3 - |X|^2 - |Y|^2)\sin^2\alpha + |Y|^2 - 1$。

4.2　Q_2 中曲面的存在性

本节中我们需要借助定理 4.1.1 构造出一些曲面。

定理 4.2.1. 设 M 单连通，且 $\{\omega^\alpha, \omega^\alpha_\beta\}$ 复值 1 形式满足 (4.2)，(4.3) 和 (4.5)，则相差一个 Q_2 的等距下，存在唯一的光滑映射 $F: M \to Q_2$ 满足：

$$F^*(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega^\alpha_1 + i\Omega^\alpha_2)) = \omega^\alpha, F^*(i\delta^\alpha_\beta\Omega^1_2 - \Omega^\alpha_\beta) = \omega^\alpha_\beta$$

证明：设

$$\phi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega^\alpha_1 + i\Omega^\alpha_2), \quad \phi^\alpha_\beta = i\delta^\alpha_\beta\Omega^1_2 - \Omega^\alpha_\beta,$$

则

$$d\phi^\alpha = -\sum\phi^\alpha_\beta\wedge\phi^\beta, \quad \phi^\alpha_\beta + \bar{\phi}^\beta_\alpha = 0,$$

$$d\phi^\alpha_\beta = -\sum\phi^\alpha_\gamma\wedge\phi^\gamma_\beta + \phi^\alpha\wedge\bar{\phi}^\beta + \bar{\phi}^\alpha\wedge\phi^\beta + \delta^\alpha_\beta\sum\phi^\gamma\wedge\bar{\phi}^\gamma.$$

考虑 $M \times SO(4)$ 上的 Pfaff 系统：

$$\chi^{\alpha} \equiv \omega^{\alpha} - \phi^{\alpha} = 0, \quad \chi^{\alpha}_{\beta} \equiv \omega^{\alpha}_{\beta} - \phi^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

易证由 $\{\chi^{\alpha}, \chi^{\alpha}\}$ 的实部和虚部定义的分布是可积的，因此存在此 Pfaff 系统的积分流形。由 $\{\Omega^{A}_{B}\}$ 的线性独立性，假定局部存在映射 $\tilde{F} : U \to SO(4)$，且它的图包含在上述 Pfaff 系统的积分流形中。如果 $\tilde{F}_1 : U \to SO(4)$ 另一个这样的映射，则对 $x_0 \in U$ 设 $\tilde{F}(x_0) = g_1, \tilde{F}_1(x_0) = g_2, g = g_1^{-1} \cdot g_2$，于是 $(R_g \circ \tilde{F})^* \Omega^{A}_{B} = (\tilde{F})^* \circ (R_g)^* \Omega^{A}_{B} = (\tilde{F})^* \Omega^{A}_{B}$，且 $(R_g \circ \tilde{F})(x_0) = g_2$。由 Pfaff 系统解的唯一性得到 $R_g \circ \tilde{F} = \tilde{F}_1$，因此在相差一个 $SO(4)$ 的右作用 R_g 下 $\tilde{F}$ 是唯一确定的。M 的单连通性保证可以把 $\tilde{F}$ 扩张到 M 上。定义 $F = \pi \circ \tilde{F} : M \to Q_2$，其中 $\pi : SO(4) \to Q_2$ 为典则投射。命题得证。

给定光滑复值函数 u, v 满足 $|u|^2 + |v|^2 = 1$ 和实数 $b > 0$，我们知道常微分方程组 (4.42)-(4.44) 的解是存在和唯一的。

命题 4.2.1. 记号如上所述，如果下述超定方程组存在解 c，其中 λ, α, a 为实值函数满足 (4.42)-(4.44)，

$$\frac{\partial(\lambda^2 c)}{\partial z} = X\bar{Y}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \bar{X}Y\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{4.46}$$

$$|c|^2 = a^2 + \frac{1}{2}(3 - |X|^2 - |Y|^2)\sin^2\alpha + |Y|^2 - 1, \tag{4.47}$$

则我们可以构造等距浸入 $F : M \to Q_2$，它具有模长为 $2b$ 的平均曲率向量场 H，且相应的 Kähler 函数为 $\cos\alpha$。

证明：只需定义：

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^3 &= \cos\frac{\alpha}{2}\varphi, \quad \tilde{\omega}^4 = \sin\frac{\alpha}{2}\bar{\varphi}, \\
\tilde{\omega}^3_3 &= -\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}(a - b)(\varphi - \bar{\varphi}), \\
\tilde{\omega}^4_4 &= -\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}(a - b)(\varphi - \bar{\varphi}), \\
\tilde{\omega}^3_4 &= -b\varphi - c\bar{\varphi}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{pmatrix} \omega^3 \\ \omega^4 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^3 \\ \tilde{\omega}^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega^3_3 & \omega^3_4 \\ \omega^4_3 & \omega^4_4 \end{pmatrix} = U^{-1}dU + U^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{\omega}^3_3 & \tilde{\omega}^3_4 \\ \tilde{\omega}^4_3 & \tilde{\omega}^4_4 \end{pmatrix} U,$$

其中 $U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$. 注意 $\{\omega^{\alpha}, \omega^{\alpha}_{\beta}\}$ 满足 (4.2) and (4.3)。因此由定理 4.2.1 可得具有非零的平均曲率向量场的等距浸入 $F : M \to Q_2$，且 $\cos\alpha$ 为其 Kähler 函数。命题得证。

4.3 Q_2 中曲面的构造

记号如上所述，设

$$u = e^{i\beta}\cos\theta, \quad v = e^{i\gamma}\sin\theta, \tag{4.48}$$

其中 β, γ, θ 实值函数，则

$$X = e^{2i\beta}\cos^2\theta + e^{2i\gamma}\sin^2\theta, \tag{4.49}$$

$$Y = (e^{i(\gamma-\beta)} - e^{i(\beta-\gamma)})\sin\theta\cos\theta. \tag{4.50}$$

我们称 θ 为偏差角，它标志着 Q_2 和 CP^2 具有平行平均曲率向量的曲面构造的不同。当 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ 时，微分方程组 (4.42)-(4.45) 变为：

$$\frac{d\lambda}{dx} = -2\lambda^2(a-b)\cot\alpha, \tag{4.51}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = 2\lambda(a+b), \tag{4.52}$$

$$\frac{da}{dx} = 2\lambda[2(a^2-ba)\cot\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha], \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial(\lambda^2 c)}{\partial z} = 0, \tag{4.54}$$

其中 $|c|^2 = a^2 + \sin^2\alpha - 1$。如 [19] 中所述，我们知道此微分方程组只有常数解，因此有下述定理：

定理 4.3.1. 设 $F: M \to Q_2$ 具有非零平行平均曲率向量场的等距浸入，且它的偏差角 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$，则 M 平坦的，且 F 是全实的。

证明：如 [19] 所述，$\alpha = \frac{\pi}{2}$，因此 $a = -b, |c|^2 = a^2$，由 (4.36) Gauss 曲率 $K = 0$。定理得证。

如果 c 是 (4.51)-(4.54) 的一个解，则对固定的 $t \in (-\pi, \pi)$，$c_t = ce^{it}$ 也满足那些方程。因此对每个 t 有一个等距浸入 $F_t: M \to Q_2$，具有非零的平均曲率向量场 H_t，且 $\cos\alpha_t = \cos\alpha$，$\| H_t \| = \| H \|$。

定理 4.3.2. 设实数 $b > 0$，λ, α, a 为实值单变量光滑函数满足 (4.51)-(4.53)。设 M 为单连通曲面，则存在一个单参数簇的等距浸入 $F_t : M \to Q_2, t \in (-\pi, \pi)$，且具有平行的平均曲率向量场 H_t 满足 $\| H_t \| = 2b$，F_t 相互等距，偏差角 $\theta_t = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$。

下面设 $F: M \to Q_2$ 具有平行平均曲率向量场的等距浸入，偏差角 $\theta = 0$，$c = be^{it}$，则

$$\tilde{\omega}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi, \quad \tilde{\omega}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varphi},$$

$$\tilde{\omega}_3^3 = b(\varphi - \bar{\varphi}),$$

$$\tilde{\omega}_4^4 = b(\varphi - \bar{\varphi}),$$

$$\tilde{\omega}_4^3 = -b(\varphi + e^{it}\bar{\varphi}).$$

由变换关系 (4.7) 可得

$$\begin{aligned}
\omega^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\beta}\varphi, \quad \omega^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}\bar{\varphi},\\
\omega_3^3 &= b(\varphi-\bar{\varphi})+id\beta,\\
\omega_4^4 &= b(\varphi-\bar{\varphi})+id\beta,\\
\omega_4^3 &= -be^{-2i\beta}(\varphi+e^{it}\bar{\varphi}).
\end{aligned}$$

但由 (4.4)，$\omega_4^3=\Omega_4^3$ 是实的，因此 $\tan 2\beta=\sin t/(1+\cos t)$，即 $\beta=\mathrm{const}$。于是 SO(4) 的 Maurer-Cartan 形式矩阵为：

$$\begin{pmatrix}
0 & 2b\theta^2 & -\cos\beta\theta^1-\sin\beta\theta^2 & -\cos\beta\theta^1-\sin\beta\theta^2\\
-2b\theta^2 & 0 & \sin\beta\theta^1-\cos\beta\theta^2 & -\sin\beta\theta^1+\cos\beta\theta^2\\
\cos\beta\theta^1+\sin\beta\theta^2 & -\sin\beta\theta^1+\cos\beta\theta^2 & 0 & -2b(\cos2\beta\theta^1+\sin2\beta\theta^2)\\
\cos\beta\theta^1+\sin\beta\theta^2 & \sin\beta\theta^1-\cos\beta\theta^2 & 2b(\cos2\beta\theta^1+\sin2\beta\theta^2) & 0
\end{pmatrix}$$

例 4.3.1. 设 $\mathbb{R}^2$ 为二维欧氏平面，其上度量为 $ds^2=\frac{1}{2}(dx^2+dy^2)$，且 $\varphi=\frac{1}{2}dz=\frac{1}{2}(dx+idy)$。假设 $c=b$，则 SO(4) 的 *Maurer-Cartan* 形式矩阵为：

$$\begin{pmatrix}
0 & 2b\theta^2 & -\theta^1 & -\theta^1\\
-2b\theta^2 & 0 & -\theta^2 & \theta^2\\
\theta^1 & \theta^2 & 0 & -2b\theta^1\\
\theta^1 & -\theta^2 & 2b\theta^1 & 0
\end{pmatrix}.$$

设

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
0 & 2by & -x & -x\\
-2by & 0 & -y & y\\
x & y & 0 & -2bx\\
x & -y & 2bx & 0
\end{pmatrix},$$

则 $F\doteq\pi\circ(\exp A)E_0:\mathbb{R}^2\to Q_2$ 为等距浸入，且 $\|H\|=2b$，其中 $\pi:SO(4)\to Q_2$ 投射前两行，$E_0\in SO(4)$。

注意如果上例中 $b=0$，则

$$(\exp A)E_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
\sqrt{2}\cos x & \sqrt{2}\sin x & 0 & 0\\
0 & 0 & \sqrt{2}\cos y & \sqrt{2}\sin y\\
\sin x & -\cos x & \sin y & -\cos y\\
\sin x & -\cos x & -\sin y & \cos y
\end{pmatrix},$$

其中令

$$E_0=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}.$$

于是得到极小浸入

$$F:\mathbb{R}^2\to Q_2,\quad (x,y)\mapsto[(\cos x,\sin x,i\cos y,i\sin y)],$$

它可以看成极小环面 T^2 的浸入 *[41]*。

第五章　Q_2 中的 H 极小 Lagrangian 曲面

H. Ma, M. Schmies[28] 给出了 CP^2 中一簇 H 极小的 Lagrangian 环面，而 A. E. Mironov, D. Zuo[29] 通过 Hopf 映射构造了 CP^3 中一簇共形平坦的 H 极小 Lagrangian 环面，本章中我们描述了 Q_2 中一类具有常曲率的 H 极小 Lagrangian 曲面，并且给出了一个 Gauss 曲率 $K=2$ 的极小 Lagrangian 球面。

5.1　基础知识

本节中我们给出 Kähler 曲面中曲面的基本公式，对一般情形见 [7]。本章中我们约定以下指标变化范围：

$$1 \leqslant A, B, \ldots \leqslant 4; 1 \leqslant i, j, \ldots \leqslant 2; 3 \leqslant \alpha, \beta, \ldots \leqslant 4.$$

设 M 为光滑曲面，局部上正交标架 M 的 $\{e_1, e_2\}$，其对偶标架为 $\{\theta_1, \theta_2\}$。M 的第一个 Cartan 结构方程为：

$$d\theta_i = -\theta_{ij} \wedge \theta_j, \quad \theta_{ij} + \theta_{ji} = 0, \tag{5.1}$$

其中 θ_{ij} 是相对于余标架 θ_i 的联络形式。设 N 为 Kähler 曲面，局部上选取 N 的 (1,0) 型酉标架 $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ 且记 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 为其对偶。第一结构方程为：

$$d\varphi_i = -\varphi_{ij} \wedge \varphi_j, \quad \varphi_{ij} + \bar{\varphi}_{ji} = 0, \tag{5.2}$$

其中 φ_{ij} 是相对于余标架 φ_i 的联络形式。

设 $f: M \to N$ 为等距浸入，令

$$f^*\varphi_i = f^i_j \theta_j. \tag{5.3}$$

对 (5.3) 外微分可得

$$(df^i_j - f^i_k \theta_{kj} + \varphi_{ik} f^k_j) \wedge \theta_j = 0. \tag{5.4}$$

令

$$Df^i_j = df^i_j - f^i_k \theta_{kj} + \varphi_{ik} f^k_j = f^i_{jk} \theta_k, \tag{5.5}$$

为 f^i_j 的协变导数，则由 (5.4) 知 $f^i_{jk} = f^i_{kj}$。张量场 $\prod^{\mathbb{C}} = \sum_{ijk} f^i_{jk} \theta_j \otimes \theta_k \otimes \epsilon_i$ 称为 f 的复第二基本型，向量场 $H^{\mathbb{C}} = \sum_{ij} f^i_{jj} \epsilon_i$ 称为 f 的复平均曲率向量场。我们有下面结论 [7]：

命题 5.1.1. 设 $f: M \to N$ 为从曲面 M 到 Kähler 曲面 N 的等距浸入，H 为 f 的平均曲率向量，ω 为 N 的 Kähler 形式，则

$$\alpha_H := \omega(H, \cdot)_M = h_j \theta_j, \quad h_j = \frac{i}{2}(f^l_{kk} \bar{f}^l_j - \bar{f}^l_{kk} f^l_j) \tag{5.6}$$

因此 α_H 的余微分为

$$\delta\alpha_H = -\sum_j h_{jj}, \tag{5.7}$$

其中 $h_{jk}\theta_k = dh_j - h_k \theta_{kj}$。

5.2　Q_2 中的 Lagrangian 曲面

我们回忆上一章的定义，Q_2 为 CP^3 中超二次曲面，它等同于 $\mathbb{R}^4$ 中定向二维平面组成的 Grassmann 流形 $G(2,4)$：$[v+iw] \leftrightarrow [v \wedge w]$，其中 $[v+iw]$ 表示由 $\mathbb{C}^4$ 中齐性向量 $v+iw$ 给出的 Q_2 中的点，$[v\wedge w]$ 表示 $\mathbb{R}^4$ 中由 $v, w \in \mathbb{R}^4$ 张成的定向二维平面。

作为齐性空间 $Q_2 = SO(4)/SO(2)\times SO(2)$，设 $\{e_A\}$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基，则

$$de_A = \omega_{AB} e_B, \quad d\omega_{AB} = \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}, \tag{5.8}$$

其中 ω_{AB} 为 $SO(4)$ 的 Maurer-Cartan 形式满足 $\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0$。设 $f: M \to Q_2$ 从曲面 M 的等距浸入，且局部上 $f = [e_1 + ie_2] = [e_1 \wedge e_2]$。令

$$\omega_3 = \omega_{13} + i\omega_{23}, \quad \omega_4 = \omega_{14} + i\omega_{24}, \tag{5.9}$$

则 Q_2 上由 CP^3 诱导的 Fubini-Study 度量为：

$$ds_{FS}^2 = \frac{1}{2}(\omega_3\bar{\omega}_3 + \omega_4\bar{\omega}_4) = \varphi_1\bar{\varphi}_1 + \varphi_2\bar{\varphi}_2, \tag{5.10}$$

其中 $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_3, \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_4$，$Q_2$ 的 Kähler 形式为：

$$\omega = \frac{i}{4}(\omega_3 \wedge \bar{\omega}_3 + \omega_4 \wedge \bar{\omega}_4) = \frac{i}{2}(\varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \wedge \bar{\varphi}_2). \tag{5.11}$$

局部上选择 M 的正交余标架 θ_1, θ_2，则

$$f^* ds_{FS}^2 = \theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2. \tag{5.12}$$

联络形式 $\theta_{12} = -\theta_{21}$ 由 M 的结构方程给出：

$$d\theta_1 = -\theta_{12} \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = -\theta_{21} \wedge \theta_1.$$

令

$$\omega_{AB} = a_{AB}\theta_1 + b_{AB}\theta_2, \tag{5.13}$$

则

$$\omega_3 = a_3\theta_1 + b_3\theta_2, \quad \omega_4 = a_4\theta_1 + b_4\theta_2, \tag{5.14}$$

其中

$$a_3 = a_{13} + ia_{23}, \quad b_3 = b_{13} + ib_{23},$$
$$a_4 = a_{14} + ia_{24}, \quad b_4 = b_{14} + ib_{24}.$$

设

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

则得到下面命题：

命题 5.2.1. 设 $f: M \to Q_2$ 为从曲面 M 的浸入，则 f 等距且 Lagrangian 当且仅当 C 是 Hermitian，即 $CC^\dagger = I$。

证明：由 (5.12) and (5.14) 知 f 等距当且仅当

$$a_3\bar{a}_3 + a_4\bar{a}_4 = 2, \quad b_3\bar{b}_3 + b_4\bar{b}_4 = 2,$$
$$a_3\bar{b}_3 + a_4\bar{b}_4 + b_3\bar{a}_3 + b_4\bar{a}_4 = 0,$$

并且 $f^*\omega = 0$ 当且仅当

$$a_3\bar{b}_3 + a_4\bar{b}_4 - b_3\bar{a}_3 - b_4\bar{a}_4 = 0.$$

于是 $CC^\dagger = I$。命题得证。

从 Q_2 的结构方程：

$$d\varphi_1 = -\varphi_{11} \wedge \varphi_1 - \varphi_{12} \wedge \varphi_2,$$
$$d\varphi_2 = -\varphi_{21} \wedge \varphi_1 - \varphi_{22} \wedge \varphi_2,$$

由 (5.9) 和 (5.10)，可得 Q_2 的联络形式：

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = i\omega_{12}, \quad \varphi_{21} = -\varphi_{12} = \omega_{34}. \tag{5.15}$$

5.3 Q_2 中常曲率 H 极小 Lagrangian 曲面的构造

本节中我们描述了 Q_2 中一簇常曲率 H 极小曲面，并且给出了 Q_2 中常曲率 Lagrangian 二维球面的例子。给定从曲面 M 的 Lagrangian 等距浸入 $f: M \to Q_2$，局部上选择 M 上等温坐标系 (x, y) 使得

$$\theta_1 = e^u dx, \quad \theta_2 = e^u dy, \tag{5.16}$$

其中 $u(x, y)$ 为 M 上可微函数。对 (5.16) 外微分可得

$$\theta_{12} = e^{-u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\theta_1 - \frac{\partial u}{\partial x}\theta_2\right). \tag{5.17}$$

令 $U = (a_{AB}), V = (b_{AB})$，假定 $a_{2\alpha} = \lambda a_{1\alpha}, b_{2\alpha} = \lambda b_{1\alpha}$，即 U, V 有下述形式：

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & \lambda a_{13} & \lambda a_{14} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & \lambda a_{41} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & 0 & \lambda b_{13} & \lambda b_{14} \\ b_{31} & \lambda b_{31} & 0 & b_{34} \\ b_{41} & \lambda b_{41} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

其中 $a_{AB}=-a_{BA}, b_{AB}=-b_{BA}$，$\lambda$ 为光滑函数。设 $\varphi_i=f^i_j\theta_j$，则由 (5.18) 和 (5.19) 有

$$f^1_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\lambda)a_{13},\quad f^1_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\lambda)b_{13}, \tag{5.20}$$

$$f^2_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\lambda)a_{14},\quad f^2_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\lambda)b_{14}. \tag{5.21}$$

由 (5.5)，(5.15) 和 (5.17) 可得

$$f^1_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-u}\frac{\partial a_3}{\partial x}+e^{-u}b_3\frac{\partial u}{\partial y}+ia_{12}a_3-a_{34}a_4), \tag{5.22}$$

$$f^1_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-u}\frac{\partial b_3}{\partial y}+e^{-u}a_3\frac{\partial u}{\partial x}+ib_{12}b_3-b_{34}b_4), \tag{5.23}$$

$$f^2_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-u}\frac{\partial a_4}{\partial x}+e^{-u}b_4\frac{\partial u}{\partial y}+ia_{12}a_4+a_{34}a_3), \tag{5.24}$$

$$f^2_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-u}\frac{\partial b_4}{\partial y}+e^{-u}a_4\frac{\partial u}{\partial x}+ib_{12}b_4+b_{34}b_3). \tag{5.25}$$

因此由 (5.6) 和命题 5.2.1，我们有

$$h_1=-\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}-a_{12},\quad h_2=-\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}-b_{12}. \tag{5.26}$$

SO(4) 的结构方程 $d\omega_{AB}=\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}$ 给出

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{AB}}{\partial x}-\frac{a_{AB}}{\partial y}-a_{AB}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{AB}\frac{\partial u}{\partial x})=a_{AC}b_{CB}-b_{AC}a_{CB}, \tag{5.27}$$

由 (5.18) 和 (5.19) 上式为:

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{34}}{\partial x}-\frac{a_{34}}{\partial y}-a_{34}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{34}\frac{\partial u}{\partial x})=(1+\lambda^2)(-a_{13}b_{14}+b_{13}a_{14}), \tag{5.28}$$

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{13}}{\partial x}-\frac{a_{13}}{\partial y}-a_{13}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{13}\frac{\partial u}{\partial x})=-a_{14}b_{34}+b_{14}a_{34}+\lambda(a_{12}b_{13}-b_{12}a_{13}), \tag{5.29}$$

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{14}}{\partial x}-\frac{a_{14}}{\partial y}-a_{14}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{14}\frac{\partial u}{\partial x})=a_{13}b_{34}-b_{13}a_{34}+\lambda(a_{12}b_{14}-b_{12}a_{14}), \tag{5.30}$$

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{23}}{\partial x}-\frac{a_{23}}{\partial y}-a_{23}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{23}\frac{\partial u}{\partial x})=-a_{12}b_{13}+b_{12}a_{13}+\lambda(-a_{14}b_{34}+b_{14}a_{34}), \tag{5.31}$$

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{24}}{\partial x}-\frac{a_{24}}{\partial y}-a_{24}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{24}\frac{\partial u}{\partial x})=-a_{12}b_{14}+b_{12}a_{14}+\lambda(a_{13}b_{34}-b_{13}a_{34}), \tag{5.32}$$

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{12}}{\partial x}-\frac{a_{12}}{\partial y}-a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{12}\frac{\partial u}{\partial x})=0. \tag{5.33}$$

通过命题 5.2.1，(5.31) 和 (5.32) 给出

$$a_{12} = -e^{-u}\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad b_{12} = -e^{-u}\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \tag{5.34}$$

再由 (5.7) 和 (5.26)，我们得到 $\delta\alpha_H = 0$ 当且仅当

$$(e^{-u}-1)(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2})-\frac{2\lambda(e^{-u}-1)}{1+\lambda^2}[(\frac{\partial\lambda}{\partial x})^2+(\frac{\partial\lambda}{\partial y})^2]-(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \tag{5.35}$$

考虑到命题 5.2.1，设

$$a_{13} = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta, \quad a_{14} = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta, \tag{5.36}$$

$$b_{13} = -\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta, \quad b_{14} = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta, \tag{5.37}$$

其中 $\theta(x,y)$ 为 M 上的光滑函数。由 (5.28)，(5.29) 和 (5.30) 可得

$$e^{-u}(\frac{\partial b_{34}}{\partial x} - \frac{a_{34}}{\partial y} - a_{34}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{34}\frac{\partial u}{\partial x}) = -2, \tag{5.38}$$

$$-e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = a_{34}, \tag{5.39}$$

$$-e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}) = b_{34}. \tag{5.40}$$

定理 5.3.1. 给定从曲面 M 的等距浸入 $f: M \to Q_2$，诱导度量为 $ds^2 = e^{2u}(dx^2+dy^2)$，其中 (x,y) 为等温坐标系，u 为光滑函数。假定 Maurer-Cartan 形式拉回的系数为 (5.18) 和 (5.19)，则 f 为 H 极小 Lagrangian 当且仅当 (5.35) 成立，且函数 $u(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^{2u}. \tag{5.41}$$

证明：只需把 (5.39) 和 (5.40) 代入 (5.38)。

由曲面单值化定理可得：

推论 5.3.1. 条件如定理 5.3.1，如果 M 是闭的，则 M 是常曲率为 2 的二维球面 S^2。

于是我们知道

$$u = -\ln(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)), \tag{5.42}$$

(5.35) 化为：

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}[(\frac{\partial\lambda}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\lambda}{\partial y})^2] + \frac{4}{(x^2+y^2)(2+x^2+y^2)}(x\frac{\partial\lambda}{\partial x} + y\frac{\partial\lambda}{\partial y}) = 0. \tag{5.43}$$

定理 5.3.2. 条件如定理 5.3.1，且 M 是闭的，如果 λ 为常数，则 $f: S^2 \to Q_2$ 为 Gaussian 曲率为 $K = 2$ 的 Lagrangian 浸入，且它是全测地的，Maurer-Cartan 形式拉回的系数为:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta \\ 0 & 0 & \lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & \lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta \\ -\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & -\lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & 0 & -e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \\ -\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & -\lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta \\ 0 & 0 & -\lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & \lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & \lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\sin\theta & 0 & -e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ -\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & -\lambda\sqrt{\frac{2}{1+\lambda^2}}\cos\theta & e^{-u}(\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}) & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\theta(x, y)$ 为 S^2 上函数，$u(x, y)$ 如 (5.42).

证明：只需验证 f 全测地的，把 U 和 V 代人 (5.22)-(5.25) 可得 $f_{11}^1 = f_{22}^1 = f_{11}^2 = f_{22}^2 = 0$。同理 $f_{12}^1 = f_{21}^1 = f_{12}^2 = f_{21}^2 = 0$。

例 5.3.1. 设上面的 $\theta = \lambda = 0$，则有

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & -e^{-u}\frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & 0 & e^{-u}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u}\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\sqrt{2} & 0 & -e^{-u}\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

注意在这种情况 SO(4) 的 Maurer-Cartan 形式的拉回与 X. X. Jiao, J. Wang[22] 的相同，于是在相差一个刚动下，局部上 f 由下式给出:

$$f = [x^2 + y^2 - 1, 2x, 2y, i(x^2 + y^2 + 1)].$$

我们猜测方程 (5.43) 没有非常数解。

参考文献

[1] U. Abresch and H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$, Acta. Math. 193(2004), 141-174.

[2] S. Bando and Y. Ohnita, Minimal 2-spheres with constant curvature in $P_n(c)$, J. Math. Soc. Japan, Vol.39(1987), No.3, 476-487.

[3] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigoli, and L. M. Woodward, On conformal minimal immersions of S^2 into CP^n, Math. Ann. 279(1988), 599-620.

[4] F. E. Burstall, J. C. Wood, The construction of harmonic maps into complex Grassmannians, J.D.G. 23(1986),255-297.

[5] E. Calabi, Isometric embedding of complex manifolds, Ann. of Math. 58(1953), 1-23.

[6] B. Y. Chen, On the surface with parallel mean curvature vector, Indiana Univ. Math. J. 22(1973), 655-666.

[7] Q. Chen, S. Hu, X. Xu, Construction of Lagrangian submanifolds in CP^n, Pacific J. Math. (1)285(2012)31-49.

[8] I. Castro and F. Urbano, Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$, Compositio Math. 111:1 (1998), 1-14.

[9] S. S. Chern, On minimal immersions of two-sphere in a space of constant curvature, Problems in Analysis, Princeton Univ. Press, (1970),27-40.

[10] S. S. Chern and J. G. Wolfson, Minimal surfaces by moving frames, Am. J. Math. 105, (1983) 59-83.

[11] S. S. Chern and J. G. Wolfson, Harmonic maps of the two-sphere into a complex Grassmann manifold II, Ann. of Math. 125 (1987), 301-335.

[12] A. M. Din and W. J. Zakrzewski, General classiacal solution in the CP^n model, Nucl. Phys. B 174(1980), 397-406.

[13] J. H. Eschenburg, I. V. Guadalupe and R. Tribuzy, The fundamental equation of minimal surfaces in CP^2, Math. Ann. 270(1985), 571-598.

[14] J. Eells and J. C. Wood, Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, Advance in Math., 49(1983), 217-263.

[15] D. Fetcu, Surfaces with parallel mean curvature vector in complex space forms, J. Differential Geometry, 91(2012), 215-232.

[16] J. Fei, X. X. Jiao, Holomorphic 2-spheres in a complex complex Grassmann manifold $G(2,5)$. J. Grad. Univ. of Chin. Acad. Sci., 28(2)(2011), 131–140.

[17] J. Fei, C. Peng, X. Xu, Equivariant totally real 3-spheres in the complex projective space CP^n, Diff. Geom. App. 30(2012)262-273.

[18] P. Griffiths, On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence question in differential geometry, Duke Math. J. 41(1974), 775-814.

[19] S. Hirakawa, On the overdetermined system about surfaces with parallel mean curvature vector field, Kodai Math. J. 25(2002), 246-253.

[20] S. Hirakawa, Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, Geom. Dedicate 118(206), 229-244.

[21] G. R. Jensen, Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, Lecture Notes in Math. 610 (1977), 81-114.

[22] X. X. Jiao and J. Wang, Totally real minimal surfaces in the complex hyperquadrics, Diff.Geo.Appl, 31(2013), 540-555.

[23] K. Kenmotsu and D. Zhou, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, Amer. J. Math. 122(2000), 295-317.

[24] Zh. Q. Li, Minimal S^3 with constant curvature in CP^n, J. Lond. Math. Soc. (2)68(2003)223-240.

[25] Zh. Q. Li, An M. Huang, Constant curved minimal CR 3-spheres in CP^n, J. Aust. Math. Soc. 79(2005)1-10.

[26] Zh. Q. Li, Y. Q. Tao, Equivariant Lagrangian minimal S^3 in CP^n, Acta Math. Sinica, 22(2006)1215-1220.

[27] Zh. Q. Li, Zh. H. Yu, Constent curved minimal 2-spheres in G(2,4), Manuscripta math. 100(1999), 305-316.

[28] H. Ma and M. Schmies, Examples of Hamiltonian stationary Lagrangian tori in CP^2, Geom. Dedicata 118 (2006), 173-183.

[29] A. E. Mironov and D. Zuo, On a family of conformally flat Hamiltonian- minimal Lagrangian tori in CP^3, Int. Math. Res. Not. 2008 (2008), ID rnn 078.
[30] T. Ogata, Curvature pinching theorem for minimal surfaces with constant Kaehler angle in complex projective spaces. Tôhuko Math. J. 43(1991), 361-374.
[31] T. Ogata, Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(C)$, Kodai Math. J. 18(1995), 397-407.
[32] R. Schoen and J. Wolfson, Minimizing volume among Lagrangian submanifolds, pp. 181-199 in Differential equations (Florence, 1996), edited by M. Giaquinta et al., Proc. Sympos. Pure Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
[33] F. Torralbo and F. Urbano, Surfaces with parallel mean curvature vector in $S^2 \times S^2$ and $H^2 \times H^2$, Trans. Amer. Math. Soc. 364(2012), 785-813.
[34] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups(classical solutions of the chiral model), J. Diff. Geom. 30(1989), 1-50.
[35] J. G. Wolfson, On minimal surfaces in a Kähler manifold of constant holomorphic sectional curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 290(1985), 627-646.
[36] J. G. Wofson, Harmonic sequences and harmonic maps of surfaces into complex Grassmann manifolds, J. Diff. Geom. 27(1988), 161-178.
[37] X. W. Xu, X. X. Jiao, Holomorphic two-spheres in complex Grassmann manifold $G(2,4)$, Proc. Idian. Acad. Sci-Math. Sci. vol. 118(2008), No.3, 381-388.
[38] K. Yang, Complete and compact minimal surfaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989
[39] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature, Amer. J. Math. 96(1974), 345-366.
[40] Y. Zheng, Quantization of curvature of harmonic two-spheres in Grassmann manifolds, Tran. Amer. Math. Soc. 316(1989), 193-214.
[41] X. Zhong, J. Wang, X. X. Jiao, Totally real conformal minimal tori in a hyperquadric Q_2 Sci. China Math. 10(2013), 2015-2023.

致 谢

本人衷心感谢导师胡森教授三年来的悉心指导和关怀。胡老师以严谨的治学之道、宽厚仁慈的胸怀、积极乐观的生活态度，为我树立了一辈子学习的典范，他的教诲与鞭策将激励我在科学和教育的道路上励精图治，开拓创新。同时，感谢胡老师对我生活的关心和照顾。

本文的顺利完成，也离不开彭家贵教授的长期关心和指导。彭老师以严谨的治学态度，开阔的视野和敏锐的思维给我深深的启迪，将使我终生受益。特别感谢彭老师以前在讨论班上对我的严格要求和生活上的关心照顾。

本人特别感谢许小卫副教授，本文中所写内容都与许小卫副教授有充分的讨论，没有他本文不可能顺利完成。

感谢焦晓祥教授，陈卿教授，李嘉禹教授，麻希南教授，马辉教授和吴英毅老师在我学习上的帮助和指导。感谢系里黄稚新老师的长期关心。

感谢师兄王军，费杰和周显潮一起快乐的学习和生活。感谢好友柳伟，刘鹏，鲁学新，黄腾，施继旭等的支持和帮助。

最后，感谢我的家人的理解与支持。

李康

2015 年 5 月 18 日

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文：

1. S. Hu, K. Li, The Minimal S3 with Constant Sectional Curvature in CPn, J. Aust. Math. Soc. online.

待发表论文：

1. S. Hu, K. Li, The Lagrangian Surfaces with Constant Curvature in Q2, accepted.
2. S. Hu, K. Li, Surfaces with parallel mean curvature vector in the complex hyper-quadrics Q2, submitted.